Шукай простоту і не вір їй! А. Н. Уайтхед

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Математика в школах України

ПОЗАКЛАСНА РОБОТА

№ 7 (79) • ЛИПЕНЬ 2017 р. • ЗАСНОВАНИЙ У КВІТНІ 2010 р. • ВИХОДИТЬ ОДИН РАЗ НА МІСЯЦЬ •

За сприяння Міністерства освіти і науки України • Учасник проекту: ХНПУ ім. Г. С. Сковороди

У НОМЕРІ:

9 клас

КРОК У МАЙБУТНЄ

Задачі для підготовки до олімпіад учнів 9 класу

І. В. Федак, м. Івано-Франківськ

Пропонуємо умови задач III етапу Всеукраїнських олімпіад із математики, що проходили в Івано-Франківській області у 2010–2016 роках (9 клас)*. До кожної задачі подані розв'язання чи вказівки щодо розв'язання.

2010 РІК, І ТУР

1. Побудуйте графік рівняння

$$\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}=2y.$$

2. Прямокутник розміром 2010×11 розбито на одиничні квадратики. Зовнішній шар клітинок цього прямокутника товщиною в одну клітинку пофарбовано в жовтий колір, а шар клітинок товщиною в одну клітинку, який межує із зовнішнім шаром, пофарбований у блакитний колір. Наступний шар клітинок, який межує з блакитним, пофарбований у жовтий колір тощо. Знайдіть кількість жовтих та блакитних клітинок у цьому прямокутнику.

3. При яких x значення функції

$$y=\left(\sqrt{x}\right)^{2009}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2010}$$

є цілим числом?

4. Точка O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. Пряма AO перетинає сторону BC у точці D так, що

$$OD=BD=\frac{1}{3}BC.$$

Знайдіть кути трикутника ABC.

5. Число $n>2010$ задовольняє таку умову: для кожного

$$k\in\{1,2,\ldots,n-2010\}$$

числа $n+k$ та $2010+k$ є взаємно простими. Знайдіть усі такі числа n.

2010 РІК, ІІ ТУР

1. На дошці записано 16 послідовних натуральних чисел. Андрійко підрахував добуток записаних чисел, а Олеся — суму. Чи може статися так, що в Андрійка та Олесі збіглися:

1) три останні цифри результату;
2) чотири останні цифри результату?

2. Олеся може писати на дошці числа за двома правилами. Для кожного натурального n, яке вже написане на дошці, вона може написати число $3n+13$. Якщо ж записане число є точним квадратом, то вона може також записати квадратний корінь із цього числа. Чи зможе Олеся, використовуючи лише ці два правила, одержати:

1) число 55, якщо вона починала з числа 256;
2) число 256, якщо вона починала з числа 55?

3. У гострокутному трикутнику ABC кут

$$\angle B=30^\circ,$$

H — точка перетину його висот. Позначимо через O_1 та O_2 центри кіл, вписаних у трикутники ABH та CBH відповідно. Знайдіть у градусах величину кута між прямими AO_2 та CO_1.

4. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність

$$\frac{a^2(b+c-a)}{b+c}+\frac{b^2(c+a-b)}{c+a}+\frac{c^2(a+b-c)}{a+b}\le$$
$$\le\frac{ab+bc+ca}{2}.$$

* Більше задач Івано-Франківських обласних олімпіад із математики за 1987–2016 роки можна знайти у книзі: Федак І. В. Математичні олімпіади. — Х. : Видавнича група «Основа», 2016.

2011 РІК, I ТУР

1. Знайдіть усі значення параметра b, при яких для кожного фіксованого x принаймні одна з функцій

$$f_1(x)=x^2+2011x+b \text{ чи } f_2(x)=x^2-2011x+b$$

набуває додатного значення.

2. Доведіть, що існує нескінченна кількість квадратів натуральних чисел, які можна подати у вигляді 2^n+2^m, де n, m — деякі різні натуральні числа.

3. У волейбольній першості 8 команд грають в одне коло, кожна з кожною рівно один раз. За перемогу нараховується 1 очко, за поразку — 0 очок, нічиїх у волейболі не буває. Якщо по завершенні турніру різниця очок команд, які посіли перше та друге місця, не перевищує 1 очко, то між командами проводиться стикова гра. За аналогічних умов стикові ігри проводяться між командами, які посіли третє та четверте, п'яте та шосте, сьоме та восьме місця. Отже, максимум може бути проведено 4 стикові ігри. Яка найменша кількість стикових ігор може бути проведена, якщо вважати, що навіть у разі рівної кількості набраних очок у кількох команд по завершенні турніру такі команди посідали різні місця?

4. Трикутник ABC вписаний у коло. У точках A та B проведені дотичні до цього кола, які перетинаються у точці T. Пряма, проведена через точку T паралельно стороні AC, перетинає сторону BC у точці D. Доведіть, що $AD=CD$.

5. Для невід'ємних чисел a, b, c, сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність

$$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\le 8.$$

Чи може в цій нерівності досягатися рівність?

2011 РІК, II ТУР

1. Знайдіть усі трицифрові числа N, які дорівнюють сумі цифр числа N, до якої додається куб суми цифр числа N.

2. П'ять років тому сумарний вік усіх синів у родині перевищував сумарний вік усіх доньок на 2 роки. З того часу в сім'ї народилася ще одна дитина, і тепер сумарний вік усіх доньок перевищує сумарний вік усіх синів на 2 роки. На скільки відрізнялися сумарний вік синів і сумарний вік доньок у родині два роки тому?

3. На папері в клітинку зі стороною 1 задано замкнену ламану без самоперетинів. Усі вершини ламаної лежать у вузлах сітки, а всі її ланки утворюють кут $45°$ із лініями сітки. При цьому площа фігури, яку вона обмежує, дорівнює 8. Скільки вузлів сітки може лежати всередині (не на межі) ламаної?

4. У двох колах, які дотикаються зовнішнім чином у точці C, провели співнапрямлені діаметри A_1A_2 та B_1B_2 відповідно (тобто чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ є трапецією або паралелограмом). Коло з центром O на спільній внутрішній дотичній до двох поданих кіл проходить через точку перетину прямих A_1B_2 та B_1A_2 і перетинає ці прямі в точках M та N відповідно. Доведіть, що пряма MN перпендикулярна до паралельних діаметрів A_1A_2 та B_1B_2.

5. Знайдіть усі пари цілих чисел x, y, які задовольняють рівність

$$y^k=x^2+x,$$

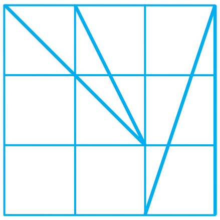
де k — натуральне число, причому $k>1$.

2012 РІК, I ТУР

1. На площині зображено 5 кіл, жодні три з яких не проходять через одну точку. Чи може статися так, що вони мають: 1) рівно 12 різних точок перетину; 2) рівно 24 різні точки перетину?

2. Графік функції $y=f(x)$ симетричний графіку функції $y=x^2$ відносно точки з координатами $(1;1)$. Розв'яжіть рівняння $f(x)=x^2$.

3. На клітчастому папері нарисовані два кути (див. рис.). Доведіть, що ці кути рівні.



4. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ кратне 23.

5. Є 10 карток. На кожній із них з обох боків записано по одному натуральному числу: на першій — числа 1 і 2, на другій — числа 3 і 4, ... , на десятій — числа 19 і 20. Усі ці картки розташовані в ряд на довгому столі. Двоє гравців грають у таку гру. За один хід гравець довільно обирає п'ять карток і перевертає їх. Програє той гравець, після ходу якого на столі з'явиться розташування чисел, що вже зустрічалося у ході гри (можливо, у початковий момент). Хто має можливість забезпечити собі виграш — той, хто починає гру, чи його суперник?

2012 РІК, ІІ ТУР

1. Про функції f і g відомо, що

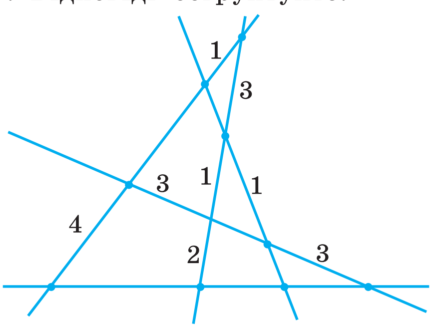
$$f(x)=\begin{cases}2-x, \text{ якщо } x>1,\\ |x|+2, \text{ якщо } x\le 1;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ якщо } x\ge 1,\\ -x+2, \text{ якщо } x<1.\end{cases}$$

Побудуйте графік функції $y=f(g(x))$.

2. Чи можна записати цілі числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 у вершинах правильного восьмикутника (по одному біля кожної вершини) так, щоб сума чисел біля будь-яких трьох послідовних вершин восьмикутника була більшою: 1) 11; 2) 12?

3. П'ять прямих перетинаються попарно (див. рис.). Відомо, що всі довжини відрізків, одержаних у результаті перетину прямих, є натуральними числами. Чи можна отримати вказані довжини відрізків такими, як це дано на рисунку? Відповідь обґрунтуйте.



4. Дано квадратний тричлен

$$2013x^2+2012x+2011.$$

Двоє грають у таку гру. Вони ходять по черзі. За один хід гравець може відняти від наявного многочлена один із таких многочленів: x^2, x, x^2-x+1 чи x^2+x-1. Програє гравець, після ходу якого одержується многочлен із цілочисловим коренем. Хто може забезпечити собі виграш — той, хто починає гру, чи його суперник?

2013 РІК

1. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20132013, і якщо в одному з них закреслити останню цифру, то дістанемо друге число. Знайдіть усі пари таких чисел.

2. Відомо, що $a\ne b$ і рівняння

$$ax^{2013}+x^{2012}+b=0 \text{ та } bx^{2013}+x^{2012}+a=0$$

мають спільний дійсний корінь. Знайдіть $a+b$.

3. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, $AD>BC$, діагоналі AC і BD перетинаються в точці E. Дотична до описаного кола трикутника BCE, проведена в точці E, перетинає пряму AD у точці F, причому точка D лежить між точками A і F. Відомо, що $AF=a$, $AD=b$. Знайдіть довжину відрізка EF.

4. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y, z виконується нерівність

$$\frac{x(y-x)}{x+y}+\frac{y(z-y)}{y+z}\le\frac{z-x}{2}.$$

5. Керівник математичного гуртка нарисував на дошці таблицю розміром 30×30 і запропонував учням заповнити її числами 1, 2, ..., 900, записуючи щосекунди в якусь порожню клітинку на свій розсуд одне з тих чисел, що не використовувались раніше. Чи зможуть учні виконати завдання так, щоб у будь-який момент часу ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці сума всіх записаних чисел не давала остачу 1 від ділення на 3?

2014 РІК

1. Знайдіть натуральне число n, для якого існує найбільша кількість пар ненульових цифр a та b, що задовольняють умову

$$\overline{ab}-\overline{ba}=n.$$

2. Два кола c_1 та c_2 проходять через центр O кола c і дотикаються до нього внутрішнім чином у точках A та B відповідно. Доведіть, що на прямій AB лежить спільна точка кіл c_1, c_2.

3. 1) Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 так, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові та суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках;

2) Чи можна розставити у комірках таблиці 4×5 числа 1, 2, ..., 20 так, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові та суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?

4. Знайдіть усі такі натуральні n, для яких числа $12n-119$ та $75n-539$ є квадратами натуральних чисел.

5. Дійсні числа a та b задовольняють умову

$$a^{2014}+b^{2014}=a^{2016}+b^{2016}.$$

Доведіть, що справджується нерівність

$$a^2+b^2\le 2.$$

2015 РІК

1. Білка піднімається на стовбур дерева по спіралі, піднімаючись за один виток на 2 м. Скільки метрів подолає вона, піднявшись на висоту 8 м, якщо обхват стовбура становить 1,5 м?

2. Нехай m та n — такі натуральні числа, що значення виразу $3m^2-mn^2-2n-4$ також є натуральним числом. Яким найменшим може бути натуральне значення цього виразу?

3. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} ax^2+2015x+1=0,\\ x^2+ax+2015=0,\\ 2015x^2+x+a=0 \end{cases}$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

4. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AC=BC)$ на стороні AC позначили точку D. Висота AH перетинає відрізок BD у точці K. Виявилося, що $AD=AK$. Знайдіть величину кута ABD.

5. Три місіонери і три канібали повинні переправитися через ріку на невеликому човні, у якому одночасно можуть поміститися не більше ніж дві особи. Знаючи про смаки канібалів, місіонери не могли дозволити собі залишатися на жодному березі ріки у меншості. Як вони можуть переправитися через ріку, якщо серед них гребти вміє лише один місіонер та один канібал?

2016 РІК

1. Скільки існує трицифрових чисел із ненульовими цифрами, які мають таку властивість: у результаті будь-якої перестановки цифр дістанемо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+xy+xz=y,\\ y^2+yz+yx=z,\\ z^2+zx+zy=x. \end{cases}$$

3. Знайдіть усі натуральні n, для яких число 11^n-1 ділиться націло на 10^n-1.

4. Вершини куба деяким чином перенумеровані числами 1; 2; ...; 8. Петрику повідомили для трьох із шести граней куба номери вершин, що їм відповідають: $\{1;4;6;8\}$, $\{1;2;6;7\}$, $\{1;2;5;8\}$. Чи зможе Петрик за цими даними сказати, який номер має вершина, що найбільш віддалена від вершини з номером 5?

5. На сторонах AB та AD квадрата $ABCD$ позначені точки N та P відповідно так, що $PN=NC$, точка Q — точка на відрізку AN, для якої $\angle NCB=\angle QPN$. Доведіть, що

$$\angle BCQ=\frac{1}{2}\angle PQA.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

2010 РІК, І ТУР

1. Розкриваючи знаки модулів при $x\ne0$, $y\ne0$, маємо $y=1$ при $x>0$, $y>0$ та $y=-1$ при $x<0$, $y<0$. Якщо $xy<0$, то з рівняння випливає $y=0$, що неможливо.

2. Жовтих — 12066, блакитних — 10044. Зовнішні шари прямокутників розмірами 2008×9, 2004×5, 2000×1 будуть блакитними. Кількості їх клітинок чисельно дорівнюють площам відповідних шарів, які ще можна подати як різниці площ відповідних прямокутників. Остаточно дістанемо блакитних клітинок

$$(2008\cdot 9-2006\cdot 7)+(2004\cdot 5-2002\cdot 3)+$$
$$+2000\cdot 1=10044.$$

Решта

$$2010\cdot 11-10044=12066$$

клітинок жовті.

3. Для $x=0$ та $x=1$. Для інших допустимих $x\in(0;1)$ маємо нерівність

$$0<\left(\sqrt{x}\right)^{2009}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2010}<x+(1-x)=1.$$

4. Позначимо на стороні BC точку E таку, що $CE=BD$. Оскільки $OB=OC$, то

$$\Delta OBD=\Delta OCE.$$

Ураховуючи умову задачі, дістанемо, що

$$BD=OD=OE=CE=DE.$$

Далі знаходимо

$$\angle DOE=\angle OED=\angle ODE=60^\circ,$$
$$\angle BOD=\angle COE=30^\circ.$$

Звідси випливає, що

$$\angle BOC=120^\circ,\ \ \angle DOC=90^\circ,$$
$$\angle AOC=90^\circ,\ \ \angle AOB=150^\circ.$$

Оскільки вписаний кут дорівнює половині відповідного центрального кута, то

$$\angle ABC=45^\circ,\ \ BAC=60^\circ,\ \ \angle ACB=75^\circ.$$

5. 2011. Нехай $n=2010+m$. Тоді за умовою задачі для кожного $k\in\{1,2,\ldots,m\}$ числа

$$n+k=2010+m+k \ \text{ та } \ 2010+k$$

є взаємно простими. Віднявши від першого з них друге, отримаємо, що для цих же k взаємно простими будуть і числа m та $2010+k$. Але серед m послідовних чисел 2011, 2012, ..., $2010+m$ одне обов'язково ділиться на m. Тому m може дорівнювати лише 1.

2010 РІК, II ТУР

1. 1) Так. Нехай на дошці були записані числа n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+15$. Їх сума

$$16n+120=8(2n+15)$$

ділиться на 8, а для $n=55$, ще й на 125, і для цього n закінчується трьома нулями. Але серед 16 послідовних чисел є принаймні 3 числа, кратні 5, та 3 парні числа, то й їх добуток теж ділиться на 1000.

2) Ні. Сума $8(2n+15)$ при жодному натуральному n не ділиться на 16. Добуток 16 послідовних натуральних чисел на 16 ділиться. Отже, 4 останні цифри у них збігатися не можуть.

2. 1) Зможе.

$$256\to\sqrt{256}=16\to 3\cdot 16+16=61\to$$
$$\to 3\cdot 61+13=196\to\sqrt{196}=14\to 3\cdot 14+13=55.$$

2) Не зможе. Квадрати натуральних чисел від ділення на 4 можуть давати лише остачі 0 або 1. Число 55 за такого ділення дає остачу 3. Тому, діючи за першим правилом, ми отримаємо на другому кроці остачу 2, далі — остачу 3, потім — знову остачу 2, які, таким чином, будуть чергуватися. Отже, жодного точного квадрата, зокрема і числа 256, отримати не вдасться.

3. 45°. Нехай прямі CO_1 та AO_2 перетинаються в точці K. Позначимо на цих прямих точки P та Q відповідно так, що

$$\angle PBA=\angle O_1BA,\ \ \angle QBC=\angle O_2BC.$$

Оскільки $\angle BAH=\angle BCH=60^\circ$, то

$$\angle BO_1H=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAH=120^\circ,$$

$$\angle BO_2H=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BCH=120^\circ.$$

Отже, навколо чотирикутників O_1BCH та O_2BAH можна описати кола. Тому

$$\angle O_1CH=\angle O_1BH=\angle PBA,$$

$$\angle O_2AH=\angle O_2BH=\angle QBC.$$

Ураховуючи, що $AH\perp BC$, $CH\perp AB$, матимемо

$$\angle BPK=\angle BQK=90^\circ.$$

Тому $\angle PKA=\angle PBQ=45^\circ$.

4. Подана нерівність для додатних a, b, c рівносильна нерівності

$$a^2+b^2+c^2\le\frac{a^3}{b+c}+\frac{1}{4}a(b+c)+\frac{b^3}{c+a}+$$
$$+\frac{1}{4}b(c+a)+\frac{c^3}{a+b}+\frac{1}{4}c(a+b).$$

Справедливість останньої випливає з трьох нерівностей вигляду

$$\frac{x^3}{y+z}+\frac{1}{4}x(y+z)\geq 2\sqrt{\frac{x^3}{y+z}\cdot\frac{1}{4}x(y+z)}=x^2,$$

$$x>0,\quad y>0,\quad z>0.$$

2011 РІК, І ТУР

1. $b>0$. Оскільки

$$f_1(0)=f_2(0)=b,$$

то значення $b\leq 0$ умову не задовольняють. Якщо $b>0$, то

$$f_1(x)+f_2(x)=2x^2+2b>0.$$

Отже, хоча б одне з чисел $f_1(x)$ чи $f_2(x)$ додатне.

2. Такими є, наприклад, числа

$$n=2k,\quad m=n+3,$$

де k — довільне натуральне число.

3. Одна. Якщо припустити, що стикових ігор не було взагалі, то різниця очок між першим і восьмим місцем була б не меншою ніж $4\cdot 2=8$. Але оскільки переможець міг набрати максимум 7 очок, а остання команда — мінімум 0 очок, то принаймні одна стикова гра буде проведена. Можливість проведення лише однієї стикової гри (між третьою і четвертою командами) ілюструє наведена турнірна таблиця:

1 місце	—	1	1	1	1	1	1	1	7
2 місце	0	—	0	1	1	1	1	1	5
3 місце	0	1	—	0	0	1	1	1	4
4 місце	0	0	1	—	1	0	1	1	4
5 місце	0	0	1	0	—	1	1	1	4
6 місце	0	0	0	1	0	—	0	1	2
7 місце	0	0	0	0	0	1	—	1	2
8 місце	0	0	0	0	0	0	0	—	0

4. З умов задачі випливає рівність:

$$\angle BAT=\angle BCA=\angle BDT.$$

Тому навколо чотирикутника $BTAD$ можна описати коло. Отже,

$$\angle DAC=\angle ADT=\angle ABT=\angle ACB=\angle ACD,$$

тобто

$$AD=DC.$$

5. З очевидної нерівності

$$(a-b)^4\geq 0$$

випливає рівносильна їй нерівність

$$8ab\left(a^2+b^2\right)\leq(a+b)^4,$$

із якої знаходимо

$$ab\left(a^2+b^2\right)\leq\frac{1}{8}(a+b)^4\leq\frac{1}{8}(a+b+c)^4\leq 2.$$

Аналогічно доводимо, що

$$bc\left(b^2+c^2\right)\leq 2,\quad ca\left(c^2+a^2\right)\leq 2.$$

Отже,

$$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\leq 6<8.$$

2011 РІК, ІІ ТУР

1. Нехай сума цифр трицифрового числа N дорівнює n, тоді

$$100\leq N=n+n^3<1000.$$

Отже, $5\leq n\leq 9$. Але з чисел

$$N=5+5^3=130,\quad N=6+6^3=222,$$

$$N=7+7^3=350,\quad N=8+8^3=520,$$

$$N=9+9^3=738$$

умову задачі задовольняє лише $N=222$.

2. Нехай 5 років тому в родині було m синів та n доньок. Якщо $m>n$, то навіть народження ще однієї доньки не призведе до зменшення різниці між сумарним віком синів та сумарним віком доньок. Якщо $m=n$, то така різниця може зменшитися на 4 лише за умови, що 4 роки тому народилася дочка. У такому разі 2 роки тому сумарний вік синів дорівнював сумарному віку доньок. Якщо $m=n-1$, то вказана різниця зменшиться рівно на 4 лише за умови, що рік тому народився син. У такому випадку 2 роки тому сумарний вік доньок був на 1 рік більший, ніж сумарний вік синів. І, нарешті, якщо $m<n-1$, то навіть у разі народження сина така різниця зменшиться принаймні на 6, що не задовольняє умову задачі.

3. Розфарбуємо вузли наявної сітки у шаховому порядку. Тоді всі вершини побудованої ламаної лежатимуть лише у вузлах якогось одного з кольорів, а сама ламана обмежуватиме фігуру, складену з квадратиків зі стороною $\sqrt{2}$

і площею 2. Зрозуміло, що таких квадратиків буде рівно 4. Якщо при цьому нарисована фігура є квадратом зі стороною $2\sqrt{2}$, то всередині неї розміщено 5 вузлів початкової сітки. У решті з чотирьох принципово можливих форм фігури, складеної з таких квадратиків, матимемо всередині лише 4 вузли — центри цих квадратиків.

4. Оскільки точка дотику двох кіл є центром гомотетії, яка одне з цих кіл переводить в інше, то

$$C = A_1B_2 \cap A_2B_1.$$

При цьому $A_1B_2 \perp A_2B_1$, оскільки кут A_1CA_2 спирається на діаметр. Отже, MN — діаметр кола з центром O. Нехай

$$D = B_1B_2 \cap MN,$$

тоді послідовно матимемо

$$\angle DB_2C = \angle A_2A_1C = \angle A_2CO = \angle CNO = \angle CND.$$

Отже, навколо $NCDB_2$ можна описати коло. Тому

$$\angle B_2DN = \angle B_2CN = 90^\circ,$$

отже, $MN \perp B_1B_2$.

5. Запишемо задану рівність у вигляді

$$y^k = x(x+1).$$

Очевидно, що її задовольняють пари чисел: $(0;0)$ та $(-1;0)$. Для решти цілих x числа x та $x+1$ — взаємно прості, а їх добуток додатний. Тому задана рівність можлива лише за умови, що

$$x = m^k,\ \ x+1 = n^k,\ \ m \in \mathbb{N},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$1 = (x+1) - x = m^k - n^k =$$

$$= (m-n)\left(m^{k-1} + m^{k-2}n + \ldots + mn^{k-2} + n^{k-1}\right).$$

Але це неможливо, оскільки $m - n \geq 1$, а вираз в останніх дужках для $k > 1$ не менший ніж 2.

2012 РІК, І ТУР

1. 1) Може. Достатньо взяти 4 кола, кожні два з яких перетинаються в двох точках, а п'яте коло таке, що не перетинається з рештою.

2) Не може. Перше коло має не більше ніж 8 точок перетину, друге додатково — не більше ніж 6 точок тощо. Усього маємо не більше ніж

$$8+6+4+2=20$$

різних точок перетину.

2. Лінія, симетрична параболі $y = x^2$ з вершиною у точці $(0;0)$ відносно точки $(1;1)$, також є параболою з вершиною $(2;2)$, вітки якої напрямлені вниз. Тому

$$f(x) = -(x-2)^2 + 2.$$

Тоді з рівняння

$$-(x-2)^2 + 2 = x^2$$

знаходимо єдиний розв'язок $x = 1$.

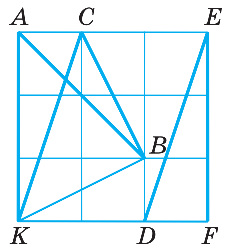
3. Оскільки

$$\angle CBK = \angle CAK = 90^\circ,$$

(*див. рис.*), то навколо $ACBK$ можна описати коло. Тому

$$\angle ABC = \angle AKC = \angle DEF.$$

Рівність заданих кутів можна дістати також із теореми синусів для трикутників ABC та DEF, або обчисливши косинуси цих кутів за теоремою косинусів, чи знайшовши їх тангенси.



4. Справедливість твердження задачі випливає з рівності

$$5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} = 5\cdot 5^{2n} + 16\cdot 2^n + 2\cdot 2^n =$$

$$= 5\left(25^n - 2^n\right) + 23\cdot 2^n = 5\cdot(25-2)\times$$

$$\times\left(25^{n-1} + 25^{n-2}\cdot 2 + \ldots + 25\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\right) + 23\cdot 2^n.$$

5. Усіх можливих розташувань чисел є 2^{10}. Розіб'ємо їх на пари так, щоб у кожній парі числа на всіх п'яти перших картках відрізнялися, а на п'яти інших — збігалися. Доведемо, що виграє перший гравець. Його виграшна стратегія полягає в тому, що він завжди перевертає лише перші п'ять карток. Після кожного ходу він створює розташування чисел, яке перебуває в парі з розташуванням чисел перед цим ходом і раніше не зустрічалося. Далі кожний наступний хід другого гравця буде створювати розташування чисел, яке не зустрічалося раніше (інакше він програє) і належить до нової пари розташувань, а наступним ходом перший гравець створює розташування чисел, яке також не зустрічалося раніше і є другою компонентою цієї пари. Кількість усіх можливих розташувань чисел є скінченною, тому в деякий момент другий гравець уже не зможе створити розташування цих чисел, яке раніше не зустрічалося.

2012 РІК, II ТУР

1. Оскільки маємо

$$g(x)=2x+1\geq 2\cdot 1+1=3$$

для $x\geq 1$ та

$$g(x)=-x+2>-1+2=1$$

для $x<1$, то

$$g(x)>1$$

для всіх дійсних x. Отже,

$$f(g(x))=2-g(x)=\begin{cases}1-2x, & x\geq 1,\\ x, & x<1.\end{cases}$$

2. Нехай біля вершин правильного восьмикутника за рухом годинникової стрілки записані числа: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8.

1) У цьому пункті умова задачі виконується, наприклад, при $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=6$, $a_4=2$, $a_5=4$, $a_6=7$, $a_7=3$, $a_8=8$.

2) Припустимо, що потрібне розміщення заданих чисел існує. Числа 2 і 3 не можуть бути записаними на сусідніх вершинах, інакше і ліворуч, і праворуч від них повинно бути записаним лише число 8, що неможливо. Між числами 1 і 2 та 1 і 3 розташовано не менше ніж дві вершини, бо інакше навіть 8 буде недостатньо для отримання потрібних сум. Тому, не порушуючи загальності, можна вважати, що $a_1=1$, $a_4=2$, $a_6=3$ (або $a_1=1$, $a_4=3$, $a_6=2$). Для обох цих випадків однозначно $a_5=8$. Тоді для довільного розміщення числа 4, яке завжди потраплятиме в одну трійку з числом 1, третім числом цієї трійки знову має бути тільки 8, що дає суперечність.

3. Довжини всіх отриманих відрізків є натуральними числами, а суми довжин двох сторін трикутника більші за довжину третьої сторони. Тому з трикутників CDE та ABE (*див. рис.*) знаходимо

$$CD=1,\quad BE=3.$$

Тоді CDE — рівносторонній трикутник,

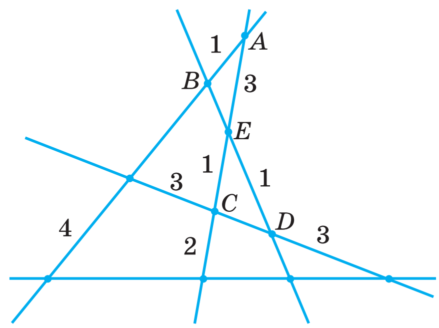
$$\angle CED=60^\circ,\quad \angle BEA=60^\circ.$$

Звідси і з рівності

$$BE=AE$$

випливає, що всі кути трикутника ABE дорівнюють 60°. Це суперечить умові

$$AB\neq AE.$$



4. Доведемо, що виграє перший гравець. Його виграшна стратегія може бути такою: спочатку він віднімає x^2, а далі повторює ходи другого. У результаті після ходів першого гравця завжди будуть з'являтися квадратні тричлени, вільний член яких є непарним, а коефіцієнти при x^2 та x мають однакову парність. У цілих точках вони набуватимуть лише непарних значень, тому не матимуть цілих коренів. Отже, діючи так, перший гравець не програє. Зауважимо тепер, що з кожним ходом сума коефіцієнтів одержаного многочлена зменшується на 1. Отже, через декілька ходів ця сума дорівнюватиме нулю, а одержаний многочлен з такою сумою коефіцієнтів матиме корінь $x=1$. Це означає, що не пізніше цього ходу гра закінчиться перемогою першого гравця.

2013 РІК

1. Нехай n — менше з цих чисел, а x — закреслена цифра у більшому з них. Тоді

$$n+(10n+x)=20132013,$$

$$11n+x=20132013.$$

Оскільки 20 132 013 ділиться на 11, то

$$x=0,\quad n=18301830.$$

Отже, шуканими є числа 1 830 183 та 18 301 830.

2. Віднявши від першого рівняння друге, матимемо рівняння

$$(a-b)\left(x^{2013}-1\right)=0.$$

Оскільки $a\neq b$, то спільним коренем заданих двох рівнянь може бути лише $x_0=1$. Отже,

$$a+1+b=0,$$

$$a+b=-1.$$

3. У трикутниках AEF та EDF кут F — спільний. Оскільки кут між хордою BE і дотичною EF дорівнює вписаному куту BCE, то маємо

$$\angle DEF=\angle BCE=\angle FAE.$$

Отже, ці два трикутники подібні, причому

$$\frac{EF}{DF}=\frac{AF}{EF},$$

тому

$$EF=\sqrt{DF\cdot AF}=\sqrt{a(a-b)}.$$

4. Справді,

$$\frac{x(y-x)}{x+y}+\frac{y(z-y)}{y+z}=(y-x)\left(\frac{x}{x+y}-\frac{1}{2}\right)+\frac{y-x}{2}+$$

$$+(z-y)\left(\frac{y}{y+z}-\frac{1}{2}\right)+\frac{z-y}{2}=$$

$$=-\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}-\frac{(y-z)^2}{2(y+z)}+\frac{z-x}{2}\leq\frac{z-x}{2}.$$

5. Доведемо, що це можливо. Серед чисел 1, 2,..., 900 кожну з остач 0, 1, 2 від ділення на 3 дають по 300 чисел. Розіб'ємо таблицю на 100 квадратиків розмірами 3×3 і по черзі заповнюватимемо кожен із них. Спочатку по діагоналі запишемо довільні три числа, які від ділення на 3 дають остачу 2, а потім у решту клітинок впишемо довільні шість чисел так, щоб у кожному рядку та кожному стовпці квадратика було по три числа з різними остачами від ділення на 3.

2014 РІК

1. Оскільки

$$n=\overline{ab}-\overline{ba}=(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)>0,$$

то $n=9k$. Очевидно, що максимальна кількість пар ненульових цифр, різниця між якими дорівнює k, буде при $k=1$, для якого існує 8 пар шуканих цифр. Тому $n=9$.

2. Якщо AB — діаметр кола c, то кола c_1 та c_2 дотикаються у точці $O\in AB$. В іншому разі AO та BO — діаметри кіл c_1 та c_2 відповідно. Якщо при цьому M — друга точка їх перетину, то

$$\angle AMO=\angle BMO=90^\circ,$$

звідки випливає, що $M\in AB$.

3. 1) Можна. Дивись таблицю. Сума чисел у кожному рядку дорівнює 40, а у кожному стовпчику — 24.

1	11	5	14	9
8	3	12	4	13
15	10	7	6	2

2) Не можна. Сума всіх чисел таблиці дорівнює 210 і не ділиться на 4. Тому в усіх чотирьох рядках суми рівними бути не можуть.

4. Позначимо

$$a^2=12n-119\ \text{ та }\ b^2=75n-539.$$

Виключивши n із цих рівностей, матимемо:

$$\frac{a^2+119}{12}=\frac{b^2+539}{75},\quad 25\left(a^2+119\right)=4\left(b^2+539\right),$$

звідки

$$4b^2-25a^2=819.$$

Запишемо останню рівність у вигляді

$$(2b-5a)(2b+5a)=3^2\cdot7\cdot13.$$

Оскільки

$$819=1\cdot819=3\cdot273=7\cdot117=9\cdot91=13\cdot63=21\cdot39$$

та

$$0<2b-5a<2b+5a,$$

то сума таких множників має ділитися на 4, а різниця — на 10. Отже, цілі значення a та

b дістанемо лише у трьох із шести можливих варіантів:

$$\begin{cases} 2b-5a=3, \\ 2b+5a=273, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=27, \\ b=69, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n=\frac{a^2+119}{12}=\frac{848}{12}\notin \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} 2b-5a=7, \\ 2b+5a=117, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=11, \\ b=31, \end{cases} \Rightarrow \quad n=\frac{a^2+119}{12}=20.$$

$$\begin{cases} 2b-5a=13, \\ 2b+5a=63, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5, \\ b=19, \end{cases} \Rightarrow \quad n=\frac{a^2+119}{12}=12.$$

5. Якщо $a^2+b^2=0$, то нерівність доведена. Для $a^2+b^2>0$ з урахуванням умови задачі вона випливає з очевидної нерівності

$$\left(a^{2014}+b^{2014}\right)\left(a^2+b^2\right)-2\left(a^{2016}+b^{2016}\right)=$$

$$=\left(a^{2014}-b^{2014}\right)\left(b^2-a^2\right)\le 0.$$

2015 РІК

1. Піднімаючись на 2 м по стовбуру дерева, білка долає шлях довжиною 2,5 м, що нескладно визначити за теоремою Піфагора, розглянувши розгортку стовбура. Тому, піднявшись на висоту 8 м, вона подолає шлях довжиною 10 м.

2. Найменшим натуральним значенням такого виразу є 2. Справді,

$$3m^2-mn^2-2n-4=2$$

для $m=4$, $n=3$. А рівність

$$3m^2-mn^2-2n-4=1$$

неможлива, бо її ліва частина є непарним числом лише для непарних m та парних n. Але тоді її остача від ділення на 4 дорівнює 3.

3. Додавши рівняння системи, маємо:

$$(a+2016)\left(x^2+x+1\right)=0.$$

Оскільки другий множник у лівій частині цього рівняння дійсних коренів не має, то задовольняє умову тільки $a=-2016$. При цьому всі три рівняння матимуть спільний дійсний корінь $x=1$.

4. Нехай

$$\angle ABD=\varphi, \quad \angle CAB=\angle CBA=\alpha.$$

Тоді з умови задачі та властивості зовнішнього кута трикутника ABK маємо:

$$\angle ADB=\angle ADK=\angle AKD=$$

$$=\angle KAB+\angle KBA=\left(90^\circ-\alpha\right)+\varphi.$$

З іншого боку,

$$\angle ADB=180^\circ-\angle DAB-\angle DBA=180^\circ-\alpha-\varphi.$$

Із цих двох рівностей знаходимо $\varphi=45^\circ$.

5. Позначимо трьох місіонерів через М м м, а трьох канібалів через К к к; великими буквами позначені місіонер і канібал, які вміють гребти. Умову задачі задовольняє, наприклад, така схема переправи: 1) переправляються К к; 2) К повертається на човні назад; 3) переправляються К к; 4) К повертається; 5) переправляються М м; 6) повертаються М к; 7) переправляються М К; 8) повертаються М к; 9) переправляються М м; 10) К повертається; 11) переправляються К к; 12) К повертається; 13) переправляються К к.

2016 РІК

1. Очевидно, що всі цифри числа — парні, оскільки на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа, які закінчуються 12, 32,...,92 та 16, 36,...96. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Усі 8 таких чисел 444, 448, 484, 488, 844, 848, 884, 888 — умову задачі задовольняють.

2. Запишемо задану систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} x(x+y+z)=y, \\ y(x+y+z)=z, \\ z(x+y+z)=x. \end{cases}$$

Якщо

$$x+y+z=0,$$

то звідси зразу маємо

$$x=y=z=0.$$

Якщо

$$x+y+z\ne 0,$$

то додамо ці рівняння. Тоді

$$(x+y+z)^2=x+y+z,$$

звідки маємо

$$x+y+z=1.$$

Із урахуванням рівнянь системи матимемо рівності $x=y$, $y=z$, $z=x$. Отже, знаходимо ще один розв'язок

$$x=y=z=\frac{1}{3}.$$

3. Таких натуральних n не існує. Справді, для кожного натурального n число 10^n-1 ділиться на 3, тому й 11^n-1 повинно ділитися на 3, що можливо лише для парних n. Але для таких n числа 10^n-1 діляться на 11, а числа 11^n-1 не діляться на 11 при жодному n.

4. Так, зможе. Наявність одиниці у трьох названих множинах номерів вершин свідчить, що ці три грані сходяться в одній вершині з номером 1. Наявність пар однакових номерів у названих множинах свідчить про те, що з цієї вершини виходять ребра 1–2, 1–6 та 1–8, причому вершина з номером 6 є протилежною по великій діагоналі куба до четвертої вершини грані, три з вершин якої мають номери 1, 2, 8, тобто до вершини з номером 5. Тому найбільш віддаленою від вершини з номером 5 є вершина з номером 6.

5. З умов задачі випливає, що

$$\angle BCP=\angle CPQ.$$

Проведемо перпендикуляри CK та PS до сторін PQ та CB відповідно.

$$\Delta CPK=\Delta PCS$$

(за спільною гіпотенузою CP та відповідними гострими кутами). Тому

$$CK=PS=AB=BC,$$

отже,

$$\Delta QBC=\Delta QKC$$

(за рівними катетами і спільною гіпотенузою). Звідси, ураховуючи, що чотирикутник $KCBQ$ — вписаний, дістанемо потрібну рівність

$$\angle BCQ=\angle KCQ=\frac{1}{2}\angle BCK=\frac{1}{2}\angle PQA,$$

що й завершує доведення.

НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРОМ У КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

А. В. Прус, м. Житомир, **В. О. Швець,** м. Київ

Поняття нерівності з однією змінною з параметром

До означення поняття нерівності з параметром слід підійти так само, як це було зроблено з означенням поняття рівняння з параметром, скориставшись аналогією. Зокрема, можна учням запропонувати такі означення.

Означення 1. Запис $f_1(x;y)>f_2(x;y)$ (інакше

$$f_1(x;y)<f_2(x;y);\ f_1(x;y)\geq f_2(x;y);$$

$$f_1(x;y)\leq f_2(x;y)),$$

де $f_1(x;y)$ та $f_2(x;y)$ — аналітично задані функції з областю визначення відповідно $D(f_1)$ і $D(f_2)$, називають нерівністю з двома змінними, а множину $D=D(f_1)\cap D(f_2)$ — областю визначення нерівності, якщо ставиться вимога — знайти усі пари значень $(x;y)$ із множини D, при яких значеннях обох функцій задовольняють указаному відношенню.

Кожну пару чисел $(x;y)$, яка задовольняє нерівність, називають її розв'язком. Усі розв'язки нерівності утворюють множину D_r, яку називають множиною розв'язків. Очевидно, що $D_r\subset D$. Множина розв'язків може бути порожньою. Тоді кажуть, що нерівність розв'язків не має.

Отже, нехай задано нерівність із двома змінними

$$f_1(x;y)\geq f_2(x;y),$$

де x і y — незалежні змінні.

Виберемо одну зі змінних і надамо їй статус параметра та позначимо однією з перших літер латинського алфавіту. Наприклад, зміну y позначимо літерою a. Матимемо нерівність із параметром a:

$$f_1(x;a)\geq f_2(x;a).$$

Поняття лінійної нерівності з параметром

Означення. Лінійною нерівністю з параметром (параметрами) називають нерівність виду

$$f(a)\cdot x>\phi(a)$$

(інакше

$$f(a)\cdot x<\phi(a),\ f(a)\cdot x\geq\phi(a),\ f(a)\cdot x\leq\phi(a)),$$

де $f(a)$ і $\phi(a)$ — аналітично задані функції параметра (змінної) a, x — незалежна змінна.

Наприклад, нерівності

$$ax>5,\ \ 3x+a<0,\ \ 5x\leq(a-2),$$

$$(10a-6)\cdot x\geq 13+2a$$

— лінійні нерівності з параметром a.

Розв'язання лінійних нерівностей із параметром подібне до розв'язання лінійних нерівностей у курсі алгебри основної школи. Тому під час їх розв'язування зручно користуватись аналогічним алгоритмом. Якщо позначити функцію $f(a)$ символом $\square$, а функцію $\phi(a)$ — символом Δ, то граф-схема такого алгоритму матиме вигляд (*рис. 1*).

Для інших знаків <, ≥, ≤ алгоритм буде дещо іншим. Можна учням запропонувати записати відповідні граф-схеми для кожного зі знаків нерівності самостійно.

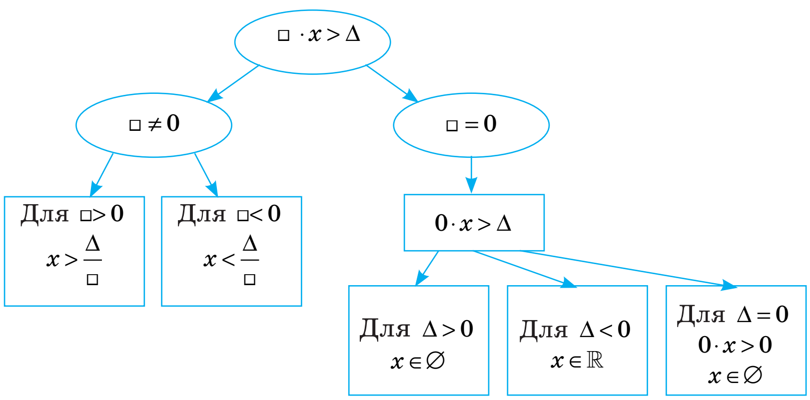


Рис. 1. Алгоритм розв'язання лінійної нерівності з параметром

Приклади розв'язання лінійних нерівностей із параметром

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $ax>0$ з параметром a.

Розв'язання

1) Якщо $a=0$, то маємо $0\cdot x>0$, тоді розв'язків немає.
2) Якщо $a>0$, то $x\in(0;+\infty)$.
3) Якщо $a<0$, то $x\in(-\infty;0)$.

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;0)$, то $x\in(-\infty;0)$; якщо $a=0$, то розв'язків немає; якщо $a\in(0;+\infty)$, то $x\in(0;+\infty)$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $ax\geq a$ з параметром a.

Розв'язання

1) Якщо $a=0$, то нерівність набуває вигляду $0\cdot x\geq 0$, звідки $x\in\mathbb{R}$.
2) Якщо $a>0$, то $x\geq 1$.
3) Якщо $a<0$, то $x\leq 1$.

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;0)$, то $x\leq 1$; якщо $a=0$, то $x\in\mathbb{R}$; якщо $a\in(0;+\infty)$, то $x\geq 1$.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $a^2x\leq 0$ з параметром a.

Розв'язання

1) Якщо $a=0$, то нерівність набуває вигляду $0\cdot x\leq 0$, звідки $x\in\mathbb{R}$.
2) Якщо $a\neq 0$, то $a^2>0$, тому $x\leq 0$.

Відповідь. Якщо $a\neq 0$, то $x\leq 0$; якщо $a=0$, то $x\in\mathbb{R}$.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $(m-1)x<5m$ із параметром m.

Розв'язання

1) Якщо $m-1>0$, $m>1$, тобто $m\in(1;+\infty)$, то
$$x<\frac{5m}{m-1},$$
тобто
$$x\in\left(-\infty;\frac{5m}{m-1}\right).$$
2) Якщо $m-1=0$, $m=1$, то нерівність набуває вигляду $0\cdot x<5\cdot 1$, $0<5$, звідки $x\in\mathbb{R}$.
3) Якщо $m-1<0$, $m<1$, тобто $m\in(-\infty;1)$, то
$$x>\frac{5m}{m-1},$$
тобто
$$x\in\left(\frac{5m}{m-1};+\infty\right).$$

Відповідь. Якщо $m\in(-\infty;1)$, то $x\in\left(\frac{5m}{m-1};+\infty\right)$; якщо $m=1$, то $x\in\mathbb{R}$; якщо $m\in(1;+\infty)$, то $x\in\left(-\infty;\frac{5m}{m-1}\right)$.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність
$$\frac{3ax+4}{3a+9}<\frac{x}{a+3}+\frac{3a-5}{3a-9}$$
з параметром a.

Розв'язання

1) Область визначення нерівності: усі пари дійсних чисел $(x;a)$, де $x\in\mathbb{R}$, $a\neq\pm 3$.
2) Виконаємо рівносильні перетворення заданої нерівності:
$$\frac{3ax+4}{3(a+3)}-\frac{x}{a+3}<\frac{3a-5}{3(a-3)};$$
$$\frac{3ax+4-3x}{3(a+3)}<\frac{3a-5}{3(a-3)};$$
$$\frac{x(3a-3)+4}{3(a+3)}<\frac{3a-5}{3(a-3)};$$
$$\frac{3a-3}{3(a+3)}x+\frac{4}{3(a+3)}<\frac{3a-5}{3(a-3)};$$
$$\frac{a-1}{a+3}x<\frac{3a^2-3}{3(a-3)(a+3)};$$
$$\frac{a-1}{a+3}x<\frac{(a-1)(a+1)}{(a-3)(a+3)}.$$

Нерівність лінійна відносно змінної x. Якщо
$$\frac{a-1}{a+3}>0,$$
тобто $a\in(-\infty;-3)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$, то
$$x<\frac{a+1}{a-3},$$
тобто
$$x\in\left(-\infty;\frac{a+1}{a-3}\right).$$

Якщо

$$\frac{a-1}{a+3}<0,\ a\in(-3;1),$$

то

$$x>\frac{a+1}{a-3},$$

тобто

$$x\in\left(\frac{a+1}{a-3};+\infty\right).$$

Якщо

$$\frac{a-1}{a+3}=0,\ a=1,$$

то нерівність набуває вигляду

$$0\cdot x<0,$$

звідки розв'язків немає.

Позначимо знайдені розв'язки на прямій параметрів та запишемо відповідь (*рис. 2*).

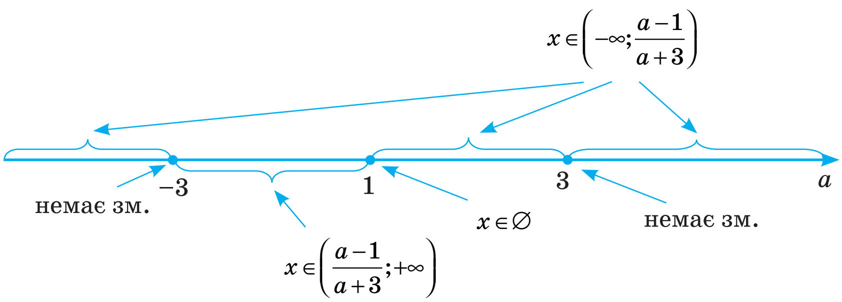


Рис. 2. Розв'язки нерівності залежно від параметра a

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;-3)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$, то $x\in\left(-\infty;\frac{a+1}{a-3}\right)$; якщо $a\in(-3;1)$, то $x\in\left(\frac{a+1}{a-3};+\infty\right)$; якщо $a=1$, то розв'язків немає.

Поняття нерівності другого степеня з параметром

До означення поняття нерівності другого степеня з параметром можна підійти так само, як це було зроблено з означенням рівняння другого степеня з параметром, скориставшись аналогією. Зокрема, можна сформулювати таке означення.

Означення. Нерівністю другого степеня з параметром (параметрами) називають нерівність виду

$$f(a)\cdot x^2+\phi(a)\cdot x+h(a)>0$$

(інакше

$$f(a)\cdot x^2+\phi(a)\cdot x+h(a)\geq 0,$$
$$f(a)\cdot x^2+\phi(a)\cdot x+h(a)<0,$$
$$f(a)\cdot x^2+\phi(a)\cdot x+h(a)\leq 0),$$

де $f(a)$, $\phi(a)$, $h(a)$ — аналітично задані функції параметра a, x — незалежна змінна.

Наприклад нерівності:

1) $x^2-3ax+2a-5\leq 0$,
де
$$f(a)=1,\ \phi(a)=-3a,$$
$$h(a)=2a-5;$$

2) $3ax^2-(6a+1)x-a^2\geq 0$,
де
$$f(a)=3a,\ \phi(a)=-(6a+1),$$
$$h(a)=-a^2;$$

3) $(2a+1)x^2-36a^2>0$,
де
$$f(a)=(2a+1),\ \phi(a)=0,$$
$$h(a)=-36a^2$$
(неповна);

4) $9a^2x^2-5ax\geq 0$,
де
$$f(a)=9a^2,\ \phi(a)=-5a,$$
$$h(a)=0$$
(неповна).

Із наведених прикладів випливає, що нерівність другого степеня з параметром може бути повною або неповною.

Якщо існують значення параметра a, при яких $f(a)=0$, то для них задана нерівність набуває вигляду

$$\phi(a)\cdot x+h(a)>0,$$

тобто стає лінійною.

Для всіх значень параметра a, при яких

$$f(a)\neq 0,$$

нерівність другого степеня з параметром

$$f(a)\cdot x^2+\phi(a)\cdot x+h(a)>0$$

називають квадратною нерівністю з параметром a.

Квадратні нерівності з параметром зазвичай розв'язують так само, як і квадратні нерівності: аналітично (або методом інтервалів, або переходом до рівносильної сукупності двох систем) чи графічно (відшуканням проміжків, на яких квадратична функція

$$y=f(a)\cdot x^2+\phi(a)\cdot x+h(a)$$

набуває додатних, недодатних, від'ємних або невід'ємних значень (*див. табл.*)).

(У таблиці: D — дискримінант квадратного тричлена

$$f(a)\cdot x^2+\phi(a)\cdot x+h(a),$$

x_1 та x_2 — нулі функції, x_0 — абсциса вершини параболи.)

Нагадаємо, що нерівність виду

$$P(x)<0,\ P(x)\le 0,\ P(x)>0,\ P(x)\ge 0,$$

де

$$P(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$$

— ціла раціональна функція степеня n аргумента x, називають раціональною нерівністю n-го степеня. Лінійні і квадратні нерівності є її окремим випадком.

Приклади розв'язування нерівності другого степеня з параметром

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $x^2\ge a$ з параметром a.

Розв'язання

1) Якщо $a<0$, то $x\in\mathbb{R}$.
2) Якщо $a=0$, то $x\in\mathbb{R}$.
3) Якщо $a>0$, то

$$x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2\ge 0,$$

$$x\in\left(-\infty;-\sqrt{a}\right]\cup\left[\sqrt{a};+\infty\right).$$

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;0]$, то $x\in\mathbb{R}$; якщо $a\in(0;+\infty)$, то

$$x\in\left(-\infty;-\sqrt{a}\right]\cup\left[\sqrt{a};+\infty\right).$$

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $x^2\le -a^2$ з параметром a.

Розв'язання

1) Якщо $a=0$, то $x=0$.
2) Якщо $a\ne 0$, то $-a^2<0$, тоді розв'язків немає.

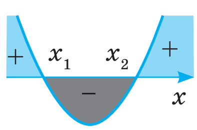
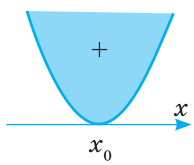
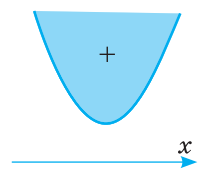
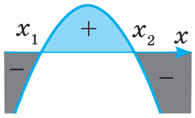
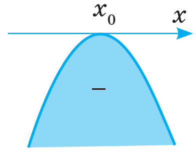
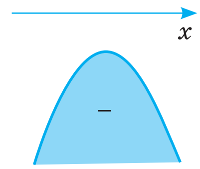
Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, то розв'язків немає; якщо $a=0$, то $x=0$.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність

$$(x-2)(x-a)<0$$

з параметром a.

Таблиця. Знаки значень функції $y=f(a)\cdot x^2+\phi(a)\cdot x+h(a)$ залежно від дискримінанта і першого коефіцієнта

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$f(a)>0$	1. 	2. 	3. 
$f(a)<0$	4. 	5. 	6. 

Розв'язання

Скористаємось методом інтервалів.

1) Якщо $a>2$ (*рис. 1.1*), то $x\in(2;a)$.

2) Якщо $a<2$ (*рис. 1.2*), то $x\in(a;2)$.

3) Якщо $a=2$, то нерівність набуває вигляду $(x-2)^2<0$, звідки розв'язків немає.

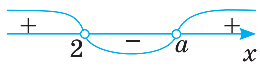


Рис. 1.1

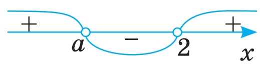


Рис. 1.2

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;2)$, то $x\in(a;2)$; якщо $a=2$, то розв'язків немає; якщо $a\in(2;+\infty)$, то $x\in(2;a)$.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність

$$(x-a)(x+2)^2<0$$

з параметром a.

Розв'язання

Скористаємось методом інтервалів.

1) Якщо $a>-2$ (*рис. 2.1*), то

$$x\in(-\infty;-2)\cup(-2;a).$$

2) Якщо $a<-2$ (*рис. 2.2*), то $x\in(-\infty;a)$.

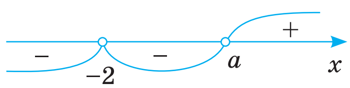


Рис. 2.1

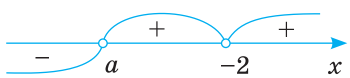


Рис. 2.2

3) Якщо $a=-2$, то нерівність набуває вигляду $(x+2)^3<0$, звідки $x\in(-\infty;2)$.

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;-2)$, то $x\in(-\infty;a)$;
якщо $a=-2$, то $x\in(-\infty;2)$;
якщо $a\in(-2;+\infty)$, то $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;a)$.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність

$$(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3>0$$

з параметром m.

Розв'язання

1) Якщо $m-1=0$, тобто $m=1$, то нерівність буде лінійною:

$$-4x-2>0,\ -4x>2,\ x<-\frac{1}{2}.$$

2) Якщо $m-1\neq 0$, $m\neq 1$, то нерівність — квадратна. Розв'яжемо її методом інтервалів. Знайдемо корені квадратного тричлена, що міститься в лівій частині квадратної нерівності. Для цього потрібно знайти дискримінант квадратного тричлена та дослідити його знак.

$$D=4(m+1)^2-4(m-1)(m-3)=$$
$$=4\left(m^2+2m+1-m^2+3m+m-3\right)=4(6m-2).$$

Якщо

$$D>0,\ 4(6m-2)>0,$$

тобто

$$m>\frac{1}{3},$$

тоді тричлен матиме два різні корені

$$x_1=\frac{2(m+1)-2\sqrt{6m-2}}{2(m-1)}=\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1},$$

$$x_2=\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}.$$

Розкладемо квадратний тричлен на множники:

$$(m-1)(x-x_1)(x-x_2)>0,$$

де x_1, x_2 — знайдені корені.

Якщо старший коефіцієнт квадратного тричлена додатний $m-1>0$ і дискримінант більший за нуль, тобто,

$$\begin{cases} m>1, \\ m>\dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

звідки

$$m\in(1;+\infty),$$

то дістанемо

$$(x-x_1)(x-x_2)>0,$$

де x_1, x_2 — знайдені корені.

Зауважимо, що при $m>1$ маємо $x_1<x_2$. Оскільки $x_1<x_2$, то (*рис. 3.1*)

$$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty).$$

Якщо $m-1<0$ і дискримінант більший за нуль, тобто

$$\begin{cases} m<1, \\ m>\dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

або інакше

$$m\in\left(\frac{1}{3};1\right),$$

то дістанемо

$$(x-x_1)(x-x_2)<0,$$

де x_1, x_2 — знайдені корені.

При $m-1<0$, тобто при $m<1$ більшим буде перший корінь: $x_1>x_2$, тому (*рис. 3.2*) $x\in(x_2;x_1)$.

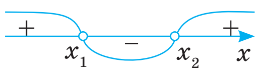


Рис. 3.1

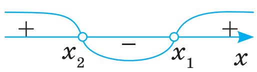


Рис. 3.2

Якщо $D=0$, тобто

$$m=\frac{1}{3},$$

тоді тричлен матиме два рівні корені:

$$x_1=x_2=\frac{2(m+1)}{2(m-1)}=-2.$$

Дістанемо нерівність:

$$\left(\frac{1}{3}-1\right)(x+2)^2>0,$$

$$-\frac{2}{3}(x+2)^2>0,$$

$$(x+2)^2<0,$$

множина розв'язків якої порожня.

Якщо $D<0$, то

$$m<\frac{1}{3},$$

тоді тричлен не матиме коренів. Квадратична функція

$$y(x)=(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3$$

набуває при

$$m<\frac{1}{3}$$

лише від'ємні значення, тоді як за умовою вона має набувати додатні значення, отже, нерівність розв'язків не має.

Позначимо знайдені розв'язки на прямій

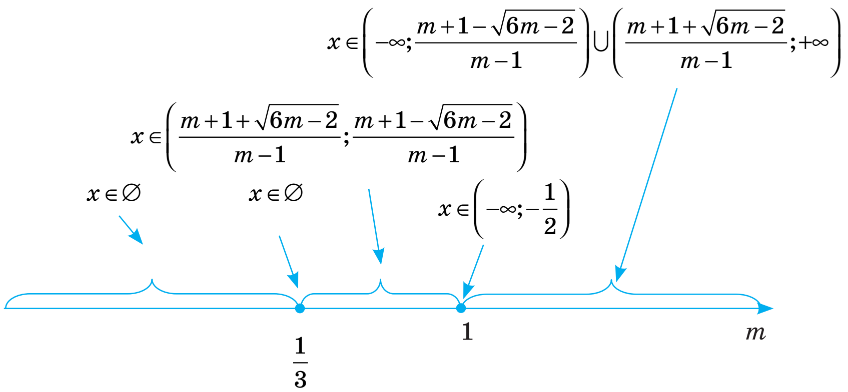


Рис. 4

параметрів та запишемо відповідь (*рис. 4*).

Відповідь. Якщо

$$m\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right],$$

то розв'язків немає; якщо

$$m\in\left(\frac{1}{3};1\right),$$

то

$$x\in\left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1};\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right);$$

якщо $m=1$, то

$$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right);$$

якщо $m\in(1;+\infty)$, то

$$x\in\left(-\infty;\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right)\cup\left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}\right).$$

НЕРІВНОСТІ

***

Знаки для операцій порівняння «>» (більше) і «<» (менше) уперше застосував англійський математик, астроном, етнограф, перекладач Томас Герріот (1560–1621) у книзі «Практика аналітичного мистецтва», надрукованій 1631 року (посмертно).

***

Не зважаючи на те, що знаки нерівності були запропоновані лише через 74 роки після знака рівності («=», Рекорд, 1557), вони ввійшли до обігу набагато раніше останнього. Однією з причин цього є те, що в типографії для знаків нерівності застосовували латинську літеру «V», що вже була наявною, тоді як наборного знака рівності («=») ще не було, а виготовити його було досить складно.

***

Позначення $a \ll b$ означає, що a набагато менше від b.

Позначення $a \gg b$ означає, що a набагато більше за b.

Означення понять «набагато менше» і «набагато більше» не є математично строгим і залежить від конкретної математичної або прикладної задачі.

***

Символ нескінченності (∞) уперше зустрічається в роботі англійського математика Джона Валліса (1616–1703) «Арифметика нескінченних величин», написаній 1665 року. Чому для позначення нескінченності Валліс обрав саме цей знак, невідомо.

НАЙБІЛЬШ ВІДОМІ НЕРІВНОСТІ

- Для будь-яких чисел $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$:
$$|a_1+a_2+\ldots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$
- Для додатних чисел $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$:
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \le$$
$$\le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}.$$

ЗАСТОСУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ У РІЗНИХ РОЗДІЛАХ МАТЕМАТИКИ

- У геометрії чимало нерівностей були відомі ще стародавнім ученим і містилися в «Началах» Евкліда (наприклад, «перпендикуляр менший від похилої, проведеної з тієї самої точки до поданої прямої», «сторона трикутника менша від суми двох інших сторін» тощо).
- У теорії чисел цілий розділ цієї дисципліни — діофантові наближення — повністю ґрунтується на нерівностях.
- У теорії ймовірностей багато законів формулюють за допомогою нерівностей.
- В обчислювальній математиці нерівності застосовують для оцінки похибки наближеного розв’язання задачі.

ПРАВИЛО ДЛЯ ЗАПАМ’ЯТОВУВАННЯ ЗНАКІВ «>» І «<»

Мерщій підкажіть: як нам швидко
дізнатись,
Між числами знак який треба писати?
Не треба потилицю чухати, друг,
У знаків нерівності є гострий кут.
Указує він на найменше число,
Таке ось у нього своє ремесло.

В. В. Агафонов

(Переклад С. П. Бабенко)

ЧЕМПІОНАТ ІЗ МАТЕМАТИЧНОГО ФУТБОЛУ

І. С. Маркова, м. Харків

Одним із напрямків роботи вчителя є повторення навчального матеріалу. Особливо важливим є повторення в 9 класі, адже на учнів чекає підсумкова атестація, а можливо, і вступні іспити до коледжів, ліцеїв тощо. Проводити повторення можна на уроках, а можна присвятити цьому позакласні заходи, тобто зробити повторення цікавим і захопливим. Форми роботи можуть бути різноманітними, зокрема, конкурси, турніри тощо. Завдання для проведення таких заходів доцільно брати аналогічні тим, що пропонують для підсумкової атестації.

Учні 9-х класів об'єднуються у вісім команд, кожна команда обирає капітана. Кількість гравців у команді може бути довільною. Бажано, щоб була приблизно однаковою і до складу кожної команди входили учні з різними рівнями навчальних досягнень. Чемпіонат проводиться у три тури. У першому турі (чвертьфіналі) беруть участь усі команди. За допомогою жеребкування визначаються пари команд-суперниць. До другого туру (півфіналу) проходять дві пари команд, які здобули перемогу у чвертьфіналі. Чемпіон визначається у фіналі, де беруть участь переможці другого туру. Кожна гра складається з двох таймів. Кожна правильна відповідь — «гол» у «ворота» суперників. У випадку рівного рахунку (нічиєї) переможець визначається за допомогою «пенальті» — додаткових запитань, на які відповідають капітани команд.

За порушення дисципліни команди можуть бути покарані шляхом попередження («жовта картка») або вилучення з гри (друга «жовта картка»).

ЧВЕРТЬФІНАЛ (ТЕМА «ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ»)

На обдумування відповіді — 30 секунд. За сигналом ведучого капітани команд піднімають картку з літерою, що відповідає правильній відповіді.

ПЕРША ГРА

І тайм

1. Яка з поданих функцій не є зростаючою на проміжку $(0;+\infty)$?

А) $y=\sqrt{x}$; Б) $y=x^2$; В) $y=\frac{3}{x}$; Г) $y=-\frac{3}{x}$.

Відповідь. В) $y=\frac{3}{x}$.

2. Серед наведених функцій укажіть обернену пропорційність.

А) $y=-7x$; Б) $y=-\frac{7}{x}$; В) $y=\frac{1}{x-7}$; Г) $y=-\frac{x}{7}$.

Відповідь. Б) $y=-\frac{7}{x}$.

3. Яка область визначення функції

$$y=\sqrt{8-2x}?$$

А) $(4;+\infty)$; Б) $[4;+\infty)$; В) $(-\infty;4)$; Г) $(-\infty;4]$.

Відповідь. Г) $(-\infty;4]$.

4. Графік функції $y=-x^2$ перенесли на три одиниці вгору. Графік якої функції отримано?

А) $y=3-x^2$; Б) $y=-x^2-3$;

В) $y=-(x-3)^2$; Г) $y=-(x+3)^2$.

Відповідь. А) $y=3-x^2$.

5. Які координати має точка перетину графіка функції $y=-3x+12$ з віссю абсцис?

А) $(0;12)$; Б) $(12;0)$; В) $(0;4)$; Г) $(4;0)$.

Відповідь. Г) $(4;0)$.

ІІ тайм

1. Укажіть серед поданих функцій ту, яка зростає на множині дійсних чисел.

А) $y=x^2$; Б) $y=2x$; В) $y=2$; Г) $y=\frac{2}{x}$.

Відповідь. Б) $y=2x$.

2. Графік якої функції перетинає графік функції $y = 3x - 4$?

А) $y = 3x$; Б) $y = 4x - 3$;
В) $y = 3x + 1$; Г) $y = 3x - 6$.

Відповідь. Б) $y = 4x - 3$.

3. Область визначення якої з наведених функцій складається з одного числа?

А) $y = \frac{1}{x}$; Б) $y = \sqrt{-x^2}$; В) $y = \sqrt{x}$; Г) $y = \sqrt{|x|}$.

Відповідь. Б) $y = \sqrt{-x^2}$.

4. Областю визначення якої з функцій є проміжок $[3; +\infty)$?

А) $y = \sqrt{3 - x}$; Б) $y = \sqrt{x - 3}$;

В) $y = \frac{1}{\sqrt{3 - x}}$; Г) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$.

Відповідь. Б) $y = \sqrt{x - 3}$.

5. Графіком якої з наведених функцій є горизонтальна пряма?

А) $y = \frac{1}{9}$; Б) $y = \frac{1}{9} - x$;

В) $y = \frac{1}{9}x + 1$; Г) $y = \frac{1}{9}x$.

Відповідь. А) $y = \frac{1}{9}$.

Додаткові запитання

1. На рисунку зображено графік функції

$$y = x^2 + 4x + 1.$$

Користуючись рисунком, установіть проміжок спадання функції.

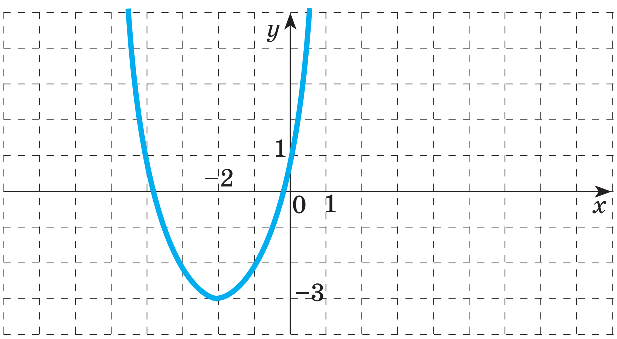


Рис. 1

А) $[-3; +\infty)$; Б) $[-2; +\infty)$; В) $(-\infty; 1]$; Г) $(-\infty; -2]$.

Відповідь. Г) $(-\infty; -2]$.

2. Графік якої функції зображено на рисунку?

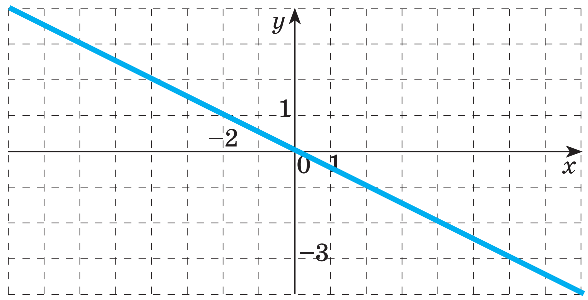


Рис. 2

А) $y = 2x$; Б) $y = \frac{1}{2}x$;

В) $y = -2x$; Г) $y = -\frac{1}{2}x$.

Відповідь. Г) $y = -\frac{1}{2}x$.

3. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись рисунком, установіть множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$.

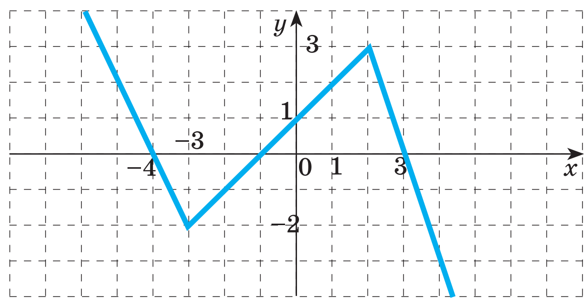


Рис. 3

А) $(-1; -3)$; Б) $(-3; 2)$;

В) $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$; Г) $(-\infty; -4) \cup (-1; 3)$.

Відповідь. Г) $(-\infty; -4) \cup (-1; 3)$.

ДРУГА ГРА

І тайм

1. У якій координатній чверті знаходиться вершина параболи $y = (x - 4)^2 - 3$?

А) У І чверті; Б) у ІІ чверті;
В) у ІІІ чверті; Г) у IV чверті.

Відповідь. Г) у IV чверті.

2. У баці було 20 л води. Щохвилини до нього наливається 3 л води. Яка формула задає залежність об'єму V води в баці від часу t його заповнення?

А) $V=20+3t$; Б) $V=20\cdot 3t$;
В) $V=3(20+t)$; Г) $V=3\cdot 25+t$.

Відповідь. А) $V=20+3t$.

3. При яких значеннях x невизначена функція

$$y=\frac{9}{x^2-49}?$$

А) 7; 9; Б) -7; 7; В) 7; Г) -7.

Відповідь. Б) -7; 7.

4. Областю визначення якої з наведених функцій є проміжок $(9;+\infty)$?

А) $y=\sqrt{x+9}$; Б) $y=\frac{9}{\sqrt{x+9}}$;

В) $y=\sqrt{x-9}$; Г) $y=\frac{9}{\sqrt{x-9}}$.

Відповідь. Г) $y=\frac{9}{\sqrt{x-9}}$.

5. Яка з функцій спадає на проміжку $(0;+\infty)$?

А) $y=-\frac{2}{x}$; Б) $y=-2x^2$;

В) $y=x-2$; Г) $y=2x^2$.

Відповідь. Б) $y=-2x^2$.

II тайм

1. Визначте формулу оберненої пропорційності, якщо її графіку належить точка $A(-3;6)$.

А) $y=-\frac{2}{x}$; Б) $y=\frac{2}{x}$;

В) $y=-\frac{18}{x}$; Г) $y=\frac{18}{x}$.

Відповідь. В) $y=-\frac{18}{x}$.

2. Графіком якої з наведених функцій є гіпербола?

А) $y=2x+7$; Б) $y=x^2+7$;

В) $y=\frac{7}{x}$; Г) $y=\frac{x}{7}$.

Відповідь. В) $y=\frac{7}{x}$.

3. Областю значень якої з поданих функцій є проміжок виду $[a;+\infty)$, де a — деяке відмінне від нуля число?

А) $y=\sqrt{x}$; Б) $y=3x-2$;

В) $y=|x|$; Г) $y=(x+4)^2+6$.

Відповідь. Г) $y=(x+4)^2+6$.

4. Яка область визначення функції

$$y=\sqrt{9-3x}?$$

А) $(-\infty;3]$; Б) $[3;+\infty)$;

В) $(3;+\infty)$; Г) $(-\infty;3)$.

Відповідь. А) $(-\infty;3]$.

5. Графік функції $y=\sqrt{x}$ перенесли паралельно на дві одиниці ліворуч. Графік якої функції було отримано?

А) $y=\sqrt{x-2}$; Б) $y=\sqrt{x}-2$;

В) $y=\sqrt{x}+2$; Г) $y=\sqrt{x+2}$.

Відповідь. Г) $y=\sqrt{x+2}$.

Додаткові запитання

1. На рисунку зображено графік деякої функції. Користуючись рисунком, укажіть проміжок зростання функції.

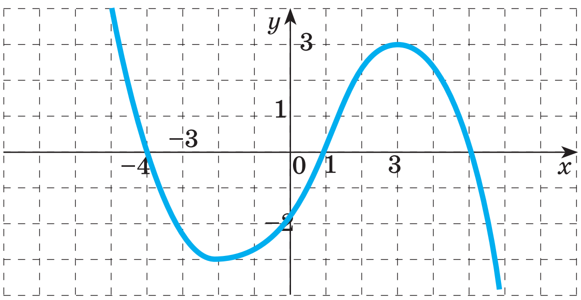


Рис. 4

А) $[1;5]$; Б) $[-2;3]$;

В) $[-3;3]$; Г) $[-3;1]$.

Відповідь. Б) $[-2;3]$.

2. Графік якої функції зображено на рисунку?

А) $y=x^2-1$; Б) $y=x^2+1$;

В) $y=(x+1)^2$; Г) $y=(x-1)^2$.

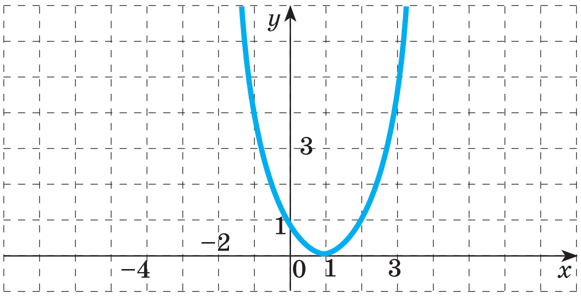


Рис. 5

Відповідь. Г) $y=(x-1)^2$.

3. На рисунку зображено графік руху туриста, де s км — відстань, яку пройшов турист за t год. Скільки часу тривав відпочинок туриста?

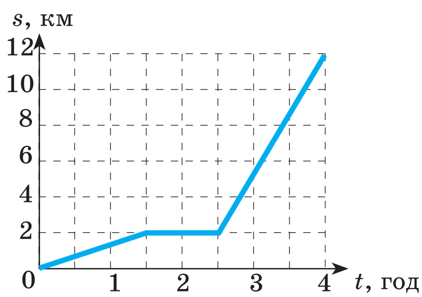


Рис. 6

А) 0,5 год; Б) 1 год; В) 1,5 год; Г) 2 год.
Відповідь. Б) 1 год.

ТРЕТЯ ГРА

I тайм

1. Графіком якої з поданих функцій не є пряма?

А) $y=3x-4$; Б) $y=\frac{x}{3}-4$;

В) $y=-\frac{x}{3}$; Г) $y=\frac{3}{x}$.

Відповідь. Г) $y=\frac{3}{x}$.

2. Областю визначення якої з наведених функцій є проміжок $(-\infty;0]$?

А) $y=\frac{4}{x}$; Б) $y=4x$; В) $y=4\sqrt{-x}$; Г) $y=4\sqrt{x}$.

Відповідь. В) $y=4\sqrt{-x}$.

3. Графіком якої з наведених функцій є пряма, що проходить через початок координат?

А) $y=\frac{20}{x}$; Б) $y=20x$;

В) $y=20-x$; Г) $y=x-20$.

Відповідь. Б) $y=20x$.

4. Знайдіть нулі функції $y=2x^2-3x-2$.

А) 2; –0,5; Б) –2; 0,5; В) –2; –0,5; Г) 2; 0,5.

Відповідь. А) 2; –0,5.

5. Дано функцію

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2x-1, & x>1.\end{cases}$$

Чому дорівнює $f\left(\frac{1}{2}\right)$?

А) $\frac{1}{2}$; Б) 1; В) $\frac{1}{4}$; Г) 0.

Відповідь. В) $\frac{1}{4}$.

II тайм

1. Знайдіть область визначення функції

$$y=\frac{5}{x^2+x-2}.$$

А) $(-\infty;2]\cup[1;+\infty)$; Б) $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$;

В) $(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;+\infty)$; Г) $(-2;1)$.

Відповідь. В) $(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;+\infty)$.

2. У якій координатній чверті знаходиться вершина параболи

$$y=(x-8)^2-20?$$

А) У I чверті; Б) у II чверті;
В) у III чверті; Г) у IV чверті.
Відповідь. Г) у IV чверті.

3. Яка з наведених функцій зростає на всій області визначення?

А) $y=x^2$; Б) $y=\sqrt{x}$; В) $y=\frac{2}{x}$; Г) $y=-2x$.

Відповідь. Б) $y=\sqrt{x}$.

4. Графіком якої з наведених функцій є пряма, паралельна осі абсцис?

А) $y=7x-4$; Б) $y=7x$; В) $y=\frac{7}{x}$; Г) $y=7$.

Відповідь. Г) $y=7$.

5. При якому значенні k графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $A\left(\frac{2}{3};-6\right)$?

А) -4; Б) 4; В) -9;
Г) такого значення не існує.
Відповідь. А) -4.

Додаткові завдання

1. На рисунку зображено графік функції
$$f(x)=-x^2-2x+3.$$
Користуючись рисунком, укажіть множину розв'язків нерівності $-x^2-2x+3>0$.

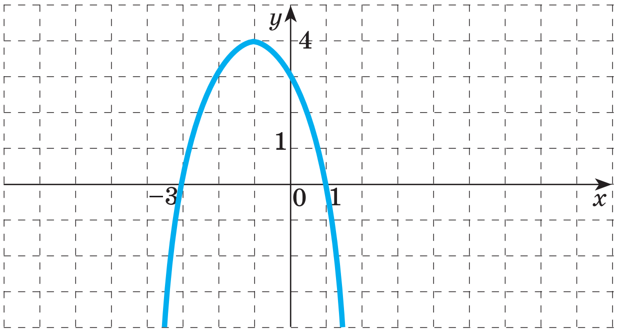


Рис. 7

А) $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$; Б) $[-3;1]$;
В) $(-3;1)$; Г) $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.
Відповідь. В) $(-3;1)$.

2. На рисунку зображено графік функції
$$y=4x-x^2.$$
Користуючись рисунком, укажіть проміжок спадання цієї функції.

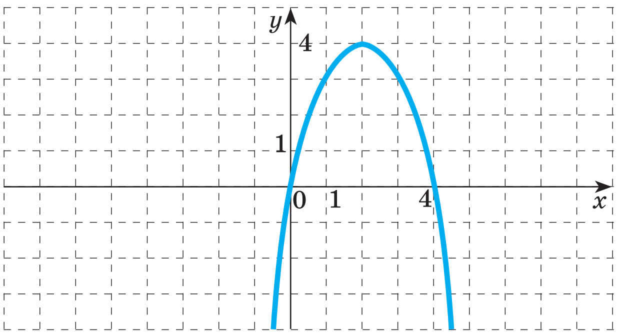


Рис. 8

А) $[2;+\infty)$; Б) $(-\infty;2]$; В) $(-\infty;4]$; Г) $[0;+\infty)$.
Відповідь. А) $[2;+\infty)$.

3. На рисунку зображено графік руху туриста. З якою швидкістю йшов турист до місця відпочинку?

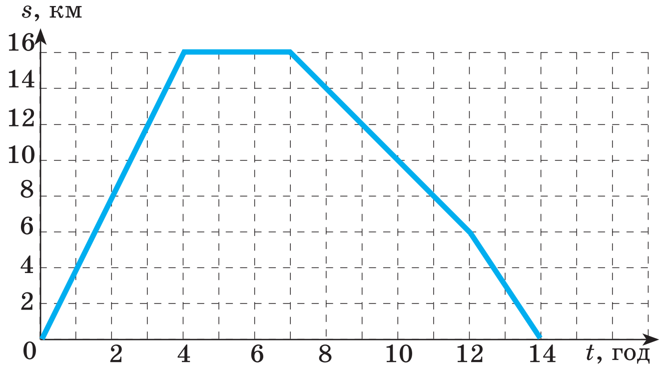


Рис. 9

А) 16 км/год; Б) 8 км/год;
В) 6 км/год; Г) 4 км/год.
Відповідь. Г) 4 км/год.

ЧЕТВЕРТА ГРА

І тайм

1. Областю визначення якої з поданих функцій є проміжок $[-1;1]$?

А) $y=1-x^2$; Б) $y=\sqrt{1-x^2}$;
В) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; Г) $y=\sqrt{1-x}$.
Відповідь. Б) $y=\sqrt{1-x^2}$.

2. Серед наведених функцій укажіть пряму пропорційність.

А) $y=3+x$; Б) $y=3$;
В) $y=\frac{3}{x}$; Г) $y=\frac{x}{3}$.
Відповідь. Г) $y=\frac{x}{3}$.

3. Графік функції $y=\sqrt{x}$ перенесли паралельно на три одиниці праворуч і на чотири одиниці вгору. Графік якої функції отримано?

А) $y=\sqrt{x-3}+4$; Б) $y=\sqrt{x-3}-4$;
В) $y=\sqrt{x+3}+4$; Г) $y=\sqrt{x+3}-4$.
Відповідь. А) $y=\sqrt{x-3}+4$.

4. Яке з поданих рівнянь із двома змінними задає функцію?

А) $x^2+y^2=4$; Б) $x^2-y^2=4$;

В) $y=|x|$; Г) $|y|=x^2$.

Відповідь. В) $y=|x|$.

5. Яка з лінійних функцій є спадною?

А) $y=5+3x$; Б) $y=\frac{5}{9}x$;

В) $y=0{,}3x-5$; Г) $y=5-3x$.

Відповідь. Г) $y=5-3x$.

II тайм

1. Знайдіть координати точки перетину графіка функції $y=5x-6$ із віссю абсцис.

А) $(0;-6)$; Б) $(-6;0)$;

В) $(1{,}2;0)$; Г) $(0;1{,}2)$.

Відповідь. В) $(1{,}2;0)$.

2. Областю значень якої з функцій є проміжок $[-2;+\infty)$?

А) $y=x-2$; Б) $y=x^2-2$;

В) $y=-2x$; Г) $y=-\frac{2}{x}$.

Відповідь. Б) $y=x^2-2$.

3. Область визначення якої з функцій складається з одного числа?

А) $y=\sqrt{x-1}$; Б) $y=\sqrt{(x-1)^2}$;

В) $y=\sqrt{x^2-1}$; Г) $y=\sqrt{-(x-1)^2}$.

Відповідь. Г) $y=\sqrt{-(x-1)^2}$.

4. Вершина якої з парабол належить осі абсцис?

А) $y=x^2-4$; Б) $y=x^2-4x$;

В) $y=(x-4)^2$; Г) $y=(x-4)^2+1$.

Відповідь. В) $y=(x-4)^2$.

5. Які абсциси мають точки перетину графіків функцій $y=x^2$ і $y=4x-3$?

А) 1; 3; Б) –1; 3;

В) –3; 1; Г) –3; –1.

Відповідь. А) 1; 3.

Додаткові запитання

1. На рисунку зображено графік квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$, дискримінант квадратного тричлена ax^2+bx+c дорівнює D. Укажіть правильне твердження.

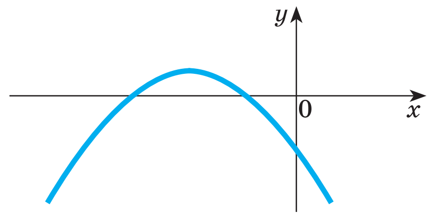


Рис. 10

А) $a>0,\ c<0,\ D>0$; Б) $a<0,\ c<0,\ D>0$;

В) $a>0,\ c>0,\ D>0$; Г) $a<0,\ c<0,\ D<0$.

Відповідь. Б) $a<0,\ c<0,\ D>0$.

2. На рисунку зображено графік лінійної функції $y=kx+b$. Які знаки мають коефіцієнти k і b?

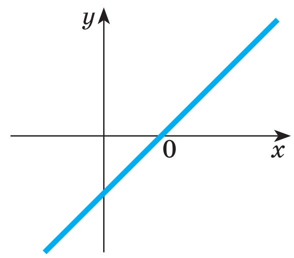


Рис. 11

А) $k>0,\ b>0$; Б) $k>0,\ b<0$;

В) $k<0,\ b>0$; Г) $k<0,\ b<0$.

Відповідь. Б) $k>0,\ b<0$.

3. Укажіть рівняння, графічне розв'язання якого зображено на рисунку.

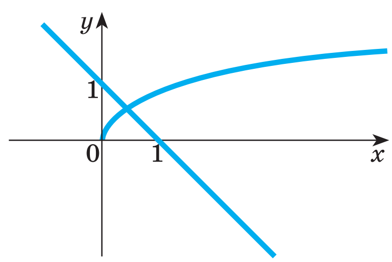


Рис. 12

А) $\sqrt{x}=x+1$; Б) $\sqrt{x}=1-x$;

В) $\sqrt{x}=-x-1$; Г) $\sqrt{x}=x-1$.

Відповідь. Б) $\sqrt{x}=1-x$.

ПІВФІНАЛ (ТЕМА «КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ. ТЕОРЕМА ВІЄТА»)

На обдумування відповіді — не більше ніж дві хвилини. Капітан команди, яка першою розв'язала задачу, піднімає руку (або подає інший сигнал) й оголошує прізвище гравця, який дає відповідь задачі. Якщо протягом двох хвилин жодна з команд не розв'язала задачу, слово надається тренеру (вчителю). Він пояснює розв'язання задачі.

ПЕРША ГРА

І тайм

1. При яких значеннях b рівняння
$$3x^2+bx+12=0$$
не має розв'язків?
Відповідь. При $b\in(-12;12)$.
2. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння
$$4x^2-5x-13=0.$$
Знайдіть значення виразу $x_1x_2-2x_1-2x_2$.
Відповідь. $-5\dfrac{3}{4}$.
3. Скоротіть дріб
$$\frac{y^2-8y+12}{12y-y^2-20}.$$
Відповідь. $\dfrac{y-6}{10-y}$.

ІІ тайм

1. Знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь
$$x^2+y^2=25 \text{ і } y=2x-5.$$
Відповідь. $(0;-5)$ і $(4;3)$.
2. Знайдіть нулі функції $y=x^4-2x^2-3$.
Відповідь. $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.
3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^2-3y^2=24,\\ x+y=8.\end{cases}$
Відповідь. $(18;-10)$, $(6;2)$.

Додаткові завдання

1. Знайдіть координати точок перетину парабол $y=2x^2-7x+8$ і $y=5x-2x^2$.
Відповідь. $(1;3)$, $(2;2)$.
2. Визначте координати точок параболи
$$y=-x^2+5x+5,$$
у яких сума абсциси й ординати дорівнює 13.
Відповідь. $(2;11)$, $(4;9)$.

ДРУГА ГРА

І тайм

1. При якому значенні c рівняння
$$6x^2-4x+c=0$$
має один корінь?
Відповідь. При $c=\dfrac{2}{3}$.
2. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння
$$3x^2+7x-11=0.$$
Знайдіть значення виразу $2x_1x_2-x_1-x_2$.
Відповідь. -5.
3. Скоротіть дріб
$$\frac{4a^2+a-3}{a^2-1}.$$
Відповідь. $\dfrac{4a-3}{a-1}$.

ІІ тайм

1. Знайдіть координати точок перетину кола $x^2+y^2=10$ і прямої $y=x-2$.
Відповідь. $(-1;-3)$, $(3;1)$.
2. Знайдіть нулі функції $y=-4x^4+5x^2-1$.
Відповідь. -1; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{2}$; 1.
3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x-4y=2,\\ xy+2y=8.\end{cases}$
Відповідь. $(-6;-2)$, $(6;1)$.

Додаткові завдання

1. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2-4x+b=0$ задовольняють умову $2x_1+3x_2=5$. Знайдіть значення b.
Відповідь. -21.
2. Знайдіть координати точок параболи
$$y=-x^2-5x+16,$$
у яких сума абсциси й ординати дорівнює 4.
Відповідь. $(-6;10)$, $(2;2)$.

ФІНАЛ

На розв'язування задачі — не більше ніж 5 хвилин. Як і у півфіналі, капітан команди, яка розв'язала задачу, подає сигнал і оголошує прізвище гравця, який пояснює розв'язання задачі біля дошки. Якщо протягом 5 хвилин жодна з команд не розв'язала задачу, розв'язання пояснює тренер (учитель).

І тайм (задача на рух)

Відстань між двома містами дорівнює 93 км. З одного міста в друге виїхав велосипедист. Через годину назустріч йому з другого міста виїхав інший велосипедист, швидкість якого на 3 км/год більша за швидкість першого. Велосипедисти зустрілися на відстані 45 км від першого міста. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

Відповідь. 9 км/год, 12 км/год.

ІІ тайм
(задача на відсоткові розрахунки)

Скільки кілограмів 20-відсоткового і скільки кілограмів 50-відсоткового сплавів міді треба взяти, щоб отримати 30 кг 30-відсоткового сплаву?

Відповідь. 20 кг, 10 кг.

Додаткове завдання
(задача на сумісну роботу)

Два трактористи можуть зорати поле, працюючи разом, за 6 год. За скільки годин може зорати це поле кожний тракторист, працюючи самостійно, якщо одному з них для того, щоб зорати $\frac{2}{5}$ поля, треба на 4 год більше, ніж другому — щоб зорати $\frac{1}{5}$ поля?

Відповідь. 15 год, 10 год.

ЗАКОДОВАНІ ВПРАВИ
Особиста першість учнів 9 класу

О. І. Чеснокова, м. Харків

Мета: повторити навчальний матеріал з математики, сприяти підготовці учнів 9 класу до ДПА.

Правила гри

У грі беруть участь усі охочі, це особиста першість. Гра складається з семи турів, півфіналу і фіналу. У кожному турі пропонують по 4 завдання, умови яких відповідають завданням для державної підсумкової атестації з математики учнів 9 класу. Учасникам гри видають таблицю відповідей — бланк з номерами завдань і табличками, у які учні вписуватимуть коди — номери правильних, на їхню думку, відповідей або відповіді (див. додаток). Після кожного туру учитель повідомляє, яку умову задовольняє код саме цього туру. Учасники гри, які отримали коди, що задовольняють зазначену умову, отримують 1 бал. До півфіналу виходять учні, які набрали найбільшу кількість балів, а до фіналу — переможці півфіналу.

ХІД ГРИ

Запишіть у таблицю відповідей цифру, яка, на вашу думку, відповідає правильній відповіді.

І ТУР «ОБИРАЄМО ІЗ ЗАПРОПОНОВАНОГО»

1. Серед наведених алгебраїчних виразів укажіть цілий.

5	3	7	9
$\frac{x+5}{x-2}$	$\frac{x}{x-4}$	$\frac{x+3}{x}$	$\frac{x-1}{5}$

2. Через яку з наведених точок проходить графік рівняння $5y-3x=-1$?

2	5	8	4
$(2;-1)$	$(-2;1)$	$(2;1)$	$(-2;-1)$

3. Яка з наведених систем нерівностей не має розв'язків?

3	6	4	1
$\begin{cases} x\ge -1,5, \\ x\ge -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x\le -1,5, \\ x\ge -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x\ge -1,5, \\ x\le -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x\le -1,5, \\ x\le -1 \end{cases}$

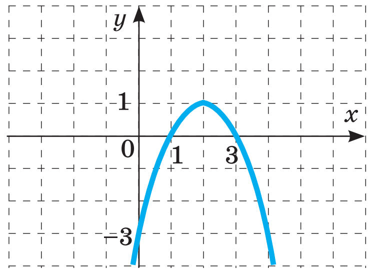
4. Яка з наведених функції не є оберненою пропорційністю?

7	3	5	2
$y=\frac{4x}{5}$	$y=\frac{4}{x}$	$y=\frac{4}{5x}$	$y=-\frac{4}{5x}$

Правильна відповідь. Сума цифр коду — найбільша з усіх можливих.

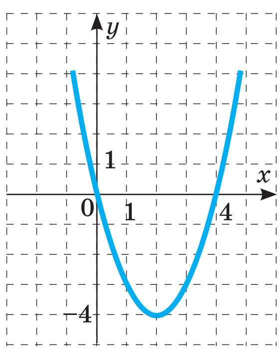
ІІ ТУР «ВИКОРИСТОВУЄМО ГРАФІК ФУНКЦІЇ»

1. На рисунку зображено графік функції
$$y=-x^2+4x-3.$$
Розв'яжіть нерівність $-x^2+4x-3\le 0$.



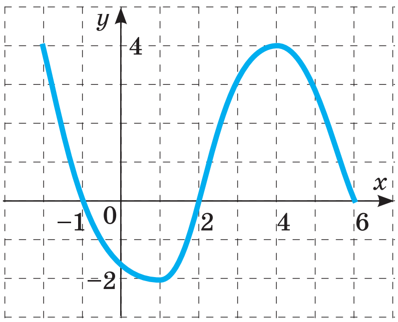
5	3	8	7
$[1;3]$	$(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$	$(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$	$[0;1]$

2. На рисунку зображено графік функції $y=x^2-4x$. Укажіть найбільше ціле число, яке є розв'язком нерівності $x^2-4x<0$.



3	9	2	5
4	−4	3	Такого числа не існує

3. На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-2;6]$. Укажіть проміжок зростання цієї функції.

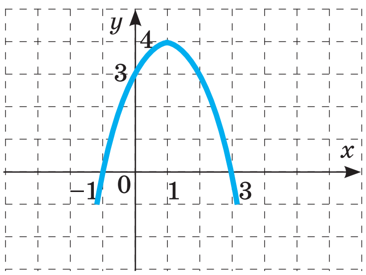


3	6	9	5
$[2;6]$	$[1;4]$	$[-2;4]$	$[-1;4]$

4. На рисунку зображено графік функції

$$y=-x^2+2x+3.$$

Укажіть найбільше значення функції.



7	5	3	4
1	3	2	4

Правильна відповідь. Усі цифри коду — парні.

III ТУР «ВІДСОТКОВІ РОЗРАХУНКИ»

1. Марічка прочитала 154 сторінки книжки, у якій усього 385 сторінок. Скільки відсотків сторінок їй залишилося прочитати?

7	9	5	8
40 %	60 %	50 %	75 %

2. Вартість дитячого велосипеда зросла від 260 грн до 312 грн. На скільки відсотків зросла ціна?

3	9	2	5
На 17 %	На 20 %	На 10 %	На 15 %

3. Вкладник поклав до банку 15 000 грн під 10 % річних. Яку суму він отримає через 2 роки?

4	8	9	2
18 000 грн	18 100 грн	18 150 грн	18 200 грн

4. Після підвищення ціни на 10 % стіл коштував 1760 грн. Знайдіть початкову ціну стола.

1	9	8	4
1500 грн	1600 грн	1550 грн	1540 грн

Правильна відповідь. Усі цифри коду — дев'ятки.

IV ТУР «КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ»

1. Чому дорівнює сума та добуток коренів квадратного рівняння $x^2-8x+15=0$?

5	7	6	9
−8; 15	−8; −15	8; 15	8; −15

2. Укажіть менший із коренів рівняння

$$x^2+3x+2=0.$$

3	5	8	7
−2	1	−1	2

3. Розкладіть квадратний тричлен $-x^2+3x+4$ на множники.

5	9
$(x-4)(x+1)$	$-(x+4)(x-1)$
7	2
$(x+4)(x-1)$	$-(x-4)(x+1)$

4. Знайдіть дискримінант квадратного рівняння $2x^2-3x+1=0$.

7	4	8	5
17	1	−1	0

Правильна відповідь. Усі цифри коду — дільники числа 12.

V ТУР «ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ»

1. Які вирази є тотожно рівними?

8	6	2	7
a^2-b^2 і $(a-b)^2$	$(x+y)(y-x)$ і x^2-y^2	$(x-3)^2$ і $(x+3)^2$	$x^2+8x+16$ і $(x+4)^2$

2. Який із виразів тотожно дорівнює виразу

$$0,2xy(2x-4y)?$$

3	2
$0,4x^2y-0,8xy^2$	$0,2x^2y-0,2xy^2$
6	4
$0,4x^2y-4y$	$2x^2y-4x^2y$

3. Якому одночлену дорівнює вираз

$$-3a^2b^3\cdot 0,5a^3b^4\ ?$$

4	8	2	5
$1,5a^6b^{12}$	$1,5a^5b^7$	$-1,5a^6b^{12}$	$-1,5a^5b^7$

4. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду вираз

$$x(3x-8)-(3x^2-4x+5).$$

4	8	6	9
$6x^2-12x+5$	$-12x-5$	$-4x-13$	$-4x-5$

Правильна відповідь. Усі цифри коду — непарні.

VI ТУР «ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК»

1. Укажіть катети прямокутного трикутника MNK, у якого $\angle N=90°$.

4	8	5	3
MN, MK	NK, KM	Визначити неможливо	MN, NK

2. Порівняйте катети AC і BC прямокутного трикутника ABC, якщо $\angle B=43°$.

4	2	6	8
$AC>BC$	Порівняти неможливо	$BC>AC$	$BC=AC$

3. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо катет дорівнює 6 см, а протилежний йому кут — 60°.

6	8	5	2
$4\sqrt{3}$ см	12 см	$2\sqrt{3}$ см	$6\sqrt{2}$ см

4. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 9 см, а один з катетів — 6 см. Знайдіть проекцію цього катета на гіпотенузу.

9	5	4	7
4 см	6 см	1,5 см	3 см

Правильна відповідь. Усі цифри коду є кратними 3.

VII ТУР «ВЕКТОРИ»

1. Знайдіть координати вектора $\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{b}$, якщо $\vec{b}(4;-6)$.

8	9	5	4
$(-2;-3)$	$(2;3)$	$(-2;3)$	$(2;-3)$

2. Серед векторів

$$\vec{a}(3;6),\ \ \vec{b}(-2;-1),\ \ \vec{c}\left(-1;\frac{1}{2}\right),\ \ \vec{d}(9;18)$$

знайдіть пару колінеарних.

4	9	2	8
$\vec{b}$ і $\vec{c}$	$\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a}$ і $\vec{d}$	$\vec{b}$ і $\vec{d}$

3. Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо

$$M(3;-2),\ \ N(-1;-3).$$

4	7	6	9
$\sqrt{29}$	$\sqrt{17}$	17	29

4. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=4$, $\angle(a,b)=135°$.

4	3	8	6
-8	-4	4	$2\sqrt{2}$

Правильна відповідь. Усі цифри коду — прості числа.

ПІВФІНАЛ

Запишіть у таблицю відповідей числа, які є відповідями до завдань.

1. Знайдіть корені рівняння $\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2+5x}=\frac{3+x}{x+5}$.
2. При якому значенні b віссю симетрії параболи $y=2x^2+bx-7$ є пряма $x=-2$?
3. Знайдіть найбільше значення функції
$$y=6x-x^2.$$
4. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC, якщо $A(5;-1)$, $B(-4;3)$, $C(6;1)$.

Правильна відповідь. Сума цифр коду є точним квадратом числа.

ФІНАЛ

Запишіть у таблицю відповідей числа, які є відповідями до завдань.

1. Спростіть вираз $\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}$.
2. Розв'яжіть рівняння
$$\frac{1}{x^2-2x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{12}{x^3+x^2-9x-9}.$$
3. Обчисліть
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}.$$
4. Спростіть вираз
$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Правильна відповідь. Сума цифр коду є найменшим двоцифровим числом у послідовності Фібоначчі.

ДОДАТОК

	Відповіді			
I тур	9	8	6	7
II тур	8	2	6	4
III тур	9	9	9	9
IV тур	6	3	2	4
V тур	7	3	5	9
VI тур	3	6	6	9
VII тур	5	2	7	3
Півфінал	3	8	9	5
Фінал	3	4	5	1

СИМЕТРІЯ
Інтегроване заняття гуртка в 9 класі

С. О. Барановська, Л. В. Сікірина, м. Мирноград, Донецька обл.

Мета: розкрити математичний та естетичний зміст поняття симетрії, показати його використання в образотворчому мистецтві, архітектурі, предметах побуту тощо; активізувати пізнавальну й творчу діяльність учнів, виховувати акуратність, увагу; стимулювати розвиток допитливості.

Симетрія — це ідея, за допомогою якої людина впродовж століть намагалася пояснити і створити порядок, красу і досконалість.

Г. Вейль

Рівність, нерівність, повторення і симетрія відіграють у мистецтві, як і в математиці, фундаментальну роль.

В. Гейзенберг

Підготовка до заняття

Усі члени гуртка заздалегідь були об'єднані у творчі групи — математиків, істориків, літераторів і художників. Кожна з груп отримала завдання: підготувати повідомлення з теми «Симетрія».

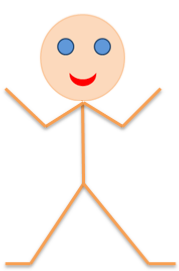
Напередодні заняття вчителі ознайомлюються з повідомленнями учнів, за потреби вносять свої корективи й доповнення, визначають черговість виступу груп на занятті.

Хід заняття

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП. МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель математики. Розпочнемо заняття з казки.

Гірке життя було у діда з бабою. Вік прожили, дітей не мали. І зробив тоді дід із соломинки хлопчика, а той візьми, та й оживи.



Подивіться уважно: чому він такий гарний?

Очікувані відповіді учнів. Тому, що ми бачимо тут симетрію.

Учитель мистецтва. Німецький математик Герман Вейль говорив: «Симетрія — основа краси світу». Людина завжди використовувала симетрію як у повсякденному житті, так і в різних видах мистецтва: архітектурі, скульптурі, народному декоративному мистецтві. Ми можемо спостерігати симетрію архітектурних споруд, симетрію орнаменту в українській вишивці, симетрію витинанки.

Словникова робота

- Орнамент (лат. ornamentum — прикраса) — візерунок, заснований на повторі і чергуванні складових його елементів; призначається для прикраси різних предметів, архітектурних споруд, творів пластичних мистецтв.

- Витинанка — вид українського народного декоративного мистецтва, походить від слова — «витинати», тобто «вирізати».

ІІ. ВИСТУПИ ТВОРЧИХ ГРУП

Виступ групи літераторів

Інсценівка «Як назвати цю родину?»

Ведучий

До Ромба в гості завітав Квадрат,
А згодом приєднався й Прямокутник.
Засперечалися: хто — старший брат,
Найдосконаліший чотирикутник?

Прямокутник

Однакові, прямі мої кути,
Рівнесенькі мої діагоналі.
Чи може Ромб такі властивості знайти?
Невже і він так само досконалий?

Ромб

Кути прямі, а далі?
Розставимо крапки над «і» гуртом,
Є бісектрисами кутів мої діагоналі,
Що перетнулись під прямим кутом.
Таку властивість має ще й Квадрат,
Тож стоїмо на вищім п'єдесталі.
Ти, Прямокутнику, для нас молодший брат,
Нехай не сваряться твої діагоналі.
І сторони в нас рівні…

Ведучий

…Знявся гам,
Немов змагались: хто кого перекричить.
Аж ось прибув і Паралелограм.
Одразу всі замовкли в одну мить.

Паралелограм

Як вам не соромно усіх ганьбити,
Між вами сварки мало не щодня,
А ми усі повинні дружно жити.
Ви — мої види, ми — одна сім'я.

Бо кожен з нас — чотирикутник,
І це відомо нашим школярам.
Ім'я Квадрат, чи Ромб, чи Прямокутник.
А назва ваша — Паралелограм.

Тож паралельні сторони навпроти
І протилежні рівні в нас кути,
Чотирикутників нехай стоять дві роти,
Нас з-поміж них всі можуть віднайти.

Перетинаються у нас діагоналі,
Перетин — в їхній середині.
Це симетрії центр. Запам'ятай надалі!
Центрально-симетрична ми родина.

Словникова робота

Симетрія (від грец. συμμετρεῖν — міряти разом) — властивість об'єкта відтворювати себе за певних змін, перетвореннях чи трансформаціях, які називають операціями симетрії. Відсутність симетрії називають асиметрією.

Виступ групи істориків

Про симетрію було відомо ще в далекому минулому за часів Стародавнього Єгипту, Вавилона, Стародавньої Греції. Про це свідчать, наприклад, геометричні орнаменти, що дійшли до нас.

Спостерігаючи за симетричними фігурами серед рослин, тварин, мінералів, люди застосовували симетрію в архітектурі і мистецтві.

Однак до XIX століття симетрія як самостійний об'єкт дослідження не приваблювала вчених, її вважали за щось само собою зрозуміле, загальновідоме, що не підлягає вивченню. У XIX–XX століттях принцип симетрії набув суттєвого значення, особливо у фізиці й математиці.

До симетрії тяжіє людська творчість у всіх своїх проявах. З цього приводу добре висловився французький архітектор Ле Корбюзьє. У своїй книзі «Архітектура XX століття» він писав: «Людині необхідний порядок; без нього всі її дії втрачають узгодженість, логічний взаємозв'язок. Чим досконалішим є порядок, тим спокійнішою і впевненішою почувається людина. Вона робить умоглядні побудови, ґрунтуючись на порядку, який продиктований їй потребами її психіки, — це творчий процес. Творчість є актом упорядкування».

У геометрію елементи вчення про симетрію вперше увів французький математик А. М. Лежандр (1752–1833), який розглядав симетрію тільки відносно площини. У праотця сучасного курсу елементарної геометрії — Евкліда поняття центра симетрії немає, проте в XI книзі його «Начал» міститься поняття просторової осі симетрії. Уперше поняття центра симетрії зустрічається в XVI ст. в одній із теорем німецького математика Христофора Клавіуса (1537–1612). У підручниках із наочної геометрії XX ст. (зокрема, французького математика Еміля Бореля (1871–1956)) учення про симетрію викладається більш повно і систематично і навіть використовується для деяких геометричних доведень.

Сьогодні вчення про симетрію лежить в основі кристалографії, знаходить застосування в науці, техніці, промисловості.

Виступ групи математиків

1. Що таке симетрія?

Симетрія (у вузькому смислі), або дзеркальне відображення відносно прямої a на площині (або відносно площини α у просторі), — це перетворення площини (простору), у результаті якого кожна точка M переходить у точку M' таку, що відрізок MM' перпендикулярний до прямої a (до площини α) і ділиться нею навпіл. Пряму a (площину α) називають віссю (площиною) симетрії.

Дзеркальне відображення — це приклад ортогонального перетворення, що змінює орієнтацію, на відміну, наприклад, від паралельного перенесення. Будь-яке ортогональне перетворення можна здійснити шляхом послідовного виконання скінченної кількості дзеркальних відображень. Цей факт відіграє суттєву роль у дослідженні симетрії геометричних фігур.

Симетрія (у широкому смислі) — це властивість геометричної фігури, що характеризує деяку правильність форми фігури, її незмінність під час руху і дзеркальних відображень. Фігура F має симетрію (симетрична), якщо існує нетотожне ортогональне перетворення, що переводить цю фігуру в себе. Плоска фігура, що перетворюється на себе під час дзеркального відображення, симетрична відносно прямої — осі a (*рис. 1*).

Симетрія відносно точки O (центральна симетрія) — це перетворення площини, у результаті якого кожна точка M переходить у точку M' таку, що відрізок MM' проходить через точку O і ділиться нею навпіл (*рис. 2*).

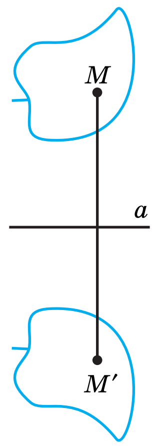


Рис. 1

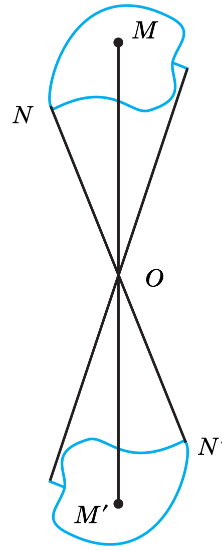


Рис. 2

Якщо фігура F на площині внаслідок повороту навколо якої-небудь точки O на кут

$$\frac{360^\circ}{n},$$

де n — ціле число, $n \geq 2$, переходить у себе, то говорять, що F має симетрію n-го порядку відносно точки O — центра симетрії. Прикладом таких фігур є правильні многокутники (*рис. 3*).

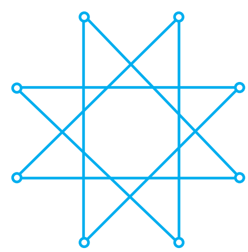


Рис. 3. Зірчастий правильний многокутник, що має симетрію восьмого порядку відносно свого центра

Коло має симетрію нескінченного порядку, оскільки суміщається з собою шляхом повороту на будь-який кут.

2. Метод симетрії

Суть методу геометричних перетворень полягає в розгляді поряд із заданими фігурами їхніх образів, отриманих за допомогою певного перетворення.

Метод симетрії передбачає заміну заданої в умові фігури або її елементів симетричними їм відносно деякої точки або прямої.

Розглянемо задачі, що ілюструють метод симетрії.

Задача 1

У прямокутному трикутнику медіана, проведена до меншого катета, дорівнює m і утворює з більшим катетом кут $15°$. Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC $\angle B = 90°$, $BC < AB$, $AM = m$ — медіана (*рис. 4*).

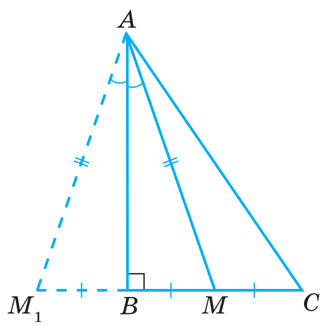


Рис. 4

Побудуємо точку M_1, симетричну точці M відносно прямої AB. Тоді трикутники MAC і M_1AB рівновеликі, оскільки мають спільну висоту AB, а $M_1B = BM = MC$ за побудовою. Отже,

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{MAC} = S_{ABM} + S_{M_1AB} = S_{M_1AM}.$$

За побудовою трикутник M_1AM рівнобедрений із бічною стороною m і кутом між бічними сторонами $30°$. Отже,

$$S_{M_1AM} = \frac{1}{2}m^2 \sin 30° = \frac{m^2}{4}.$$

Відповідь. $\frac{m^2}{4}$.

Задача 2

Точка O лежить усередині кута ABC. Знайдіть на сторонах кута точки X і Y такі, щоб периметр трикутника OXY був найменшим.

Розв'язання

Аналіз

Припустимо, що трикутник $OX'Y'$ шуканий (*рис. 5*).

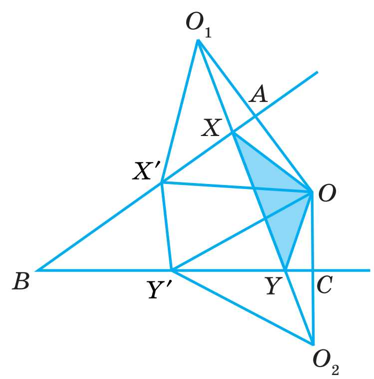


Рис. 5

Вершини X' і Y', які необхідно побудувати, мають лежати на сторонах BA і BC кута ABC. Побудуємо точки O_1 і O_2, симетричні точці O відносно цих сторін. Тоді за побудовою $OX' = O_1X'$, $OY' = O_2Y'$. Знайдемо периметр шуканого трикутника:

$$P_{OX'Y'} = OX' + X'Y' + Y'O = O_1X' + X'Y' + Y'O_2,$$

тобто периметр дорівнює

$$O_1X' + X'Y' + Y'O_2.$$

Ця сума буде найменшою, якщо точки O_1, X', Y' і O_2 лежатимуть на одній прямій. Отже, шукані точки X' і Y' мають лежати на прямій O_1O_2, тобто на перетині цієї прямої зі сторонами кута ABC.

Побудова

1) Побудуємо точки O_1 і O_2, симетричні точці O відносно прямих BA і BC відповідно.
2) Побудуємо пряму O_1O_2 і позначимо точки X і Y — точки перетину цієї прямої зі сторонами кута ABC.
3) Сполучимо точки X і Y з точкою O. Трикутник OXY — шуканий.

Спираючись на властивості геометричних перетворень, використаних у процесі побудови, нескладно довести, що побудовані точки є шуканими і визначаються однозначно.

3. Для кмітливих

1) Назвіть фігуру, яка має безліч центрів симетрії.

Відповідь. Дві паралельні прямі. Центром симетрії є середина будь-якого спільного перпендикуляра до цих прямих.

2) Наведіть приклад літер української абетки, що мають вісь симетрії.

Відповідь. Наприклад, «А», «В», «Ф», «Н» «Ш».

Виступ групи художників

У процесі вивчення многокутників ми щоразу виділяли з певного класу фігур ті, що мають елементи симетрії: серед трикутників рівнобедрені й рівносторонні, серед паралелограмів — прямокутники, ромби й квадрати, серед многокутників — правильні тощо. І це не випадково, адже світ, що нас оточує, насичений симетрією: симетричними є квіти, листя, тіла тварин і комах, сніжинки, кристали природних мінералів.

Те, що створено людиною, також здебільшого симетричне — архітектурні споруди, меблі, посуд, автомобілі, літаки тощо.

У царині мистецтв найбільш наочно симетрія проявляється в архітектурі. Вона властива творам архітектури, будучи неодмінною рисою, якщо не всієї споруди в цілому, то її частин і деталей, таких як фасад, колони, капітелі тощо.

Словникова робота

- ✓ Фасад — зовнішня, передня частина споруди.
- ✓ Колона — архітектурно оброблена вертикальна опора, зазвичай кругла в перерізі.
- ✓ Капітель — верхня частина колони, що бере на себе навантаження від горизонтальних балок перекриття.

За переконанням давньогрецьких архітекторів, симетрія уособлює закономірність, доцільність і гармонію. Фасади багатьох історичних і сучасних будівель мають елементи симетрії.

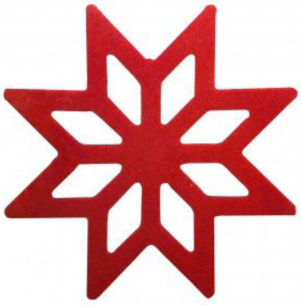
На особливу увагу заслуговує використання симетрії в декоративно-прикладному мистецтві: структура і розміщення орнаментів на українських рушниках і вишиванках — яскраве свідчення проникнення симетрії в народну творчість.

Для кмітливих

1) Укажіть види симетрії, використані під час створення орнаменту, зображеного на рисунку.

2) Створіть власний орнамент, скориставшись шаблоном (див. рис.) і застосовуючи різні види симетрії (або інші геометричні перетворення).

Примітка. Члени творчої групи заздалегідь виготовили шаблони і запропонували їх усім членам гуртка. На рисунку зображений слов'янський оберіг — зірка Алатир.



▸▸ До речі…

Чи знаєте ви, що означає восьмикутна зірка на козацьких прапорах? Її ж ми часто бачимо на українських вишивках і візерунках. Цю зірку називають Алатир.

За легендою, камінь Алатир — це священний, «живий» камінь. На ньому росте Дерево Роду (Життя). Із нього виходять і в ньому сходяться всі дороги. Він уособлює могутність і невмирущість плодючої творчої сили життя.

Будучи прадавнім, глибинно українським знаком і символом, Алатир єднає нас зі Всемогутнім Родом, своєю присутністю сприяє духовному і тілесному розвитку та добробуту.

Тому зображенням цього символу, як наймогутнішим обереговим знаком, до сьогодні прикрашають вишивки, писанки тощо.

Зверніть увагу, що зображення цієї зірки має центр симетрії і чотири осі симетрії.

III. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ ЗАНЯТТЯ. ЗАКЛЮЧНЕ СЛОВО ВЧИТЕЛІВ

Учитель математики. Симетрія проявляється не тільки в геометрії, а й у різних розділах математики, зокрема в алгебрі та в інших науках. Наприклад, многочлени виду $ax^2+bxy+ay^2$, що не змінюють значення від перестановки змінних x і y, називають симетричними. Для таких многочленів існують спеціальні способи розкладання на множники.

Наочним прикладом симетрії в алгебрі є графіки функцій: так, парабола $y=x^2$ симетрична відносно осі ординат, а гіпербола $y=\dfrac{1}{x}$ — відносно початку координат.

Біологи дійшли висновку, що будь-який живий організм «спроектовано» за чіткою геометричною схемою, і виділяють окремі види просторової симетрії, характерної для рослин і тварин.

Із курсу хімії вам відомо, що чимало природних речовин складається з кристалів, що являють собою симетричні многогранники.

Учитель мистецтва. У літературі типовими проявами симетрії є поетичні рими та розміри. Увагу мовознавців здавна привертають паліндроми (*«перевертні»*) — «симетричні» слова, фрази або вірші, що однаково читаються і зліва направо, і справа наліво: «око», «дід», «радар», «я несу гусеня», «де помити мопед»; найвідоміший з українських паліндромів «і що сало — ласощі» придумав поет О. Ірванець.

Невичерпні можливості симетрії і сьогодні приваблюють учених і митців, надихаючи їх до нових злетів творчої думки.

Я переконана, що сьогодні ви ще краще зрозуміли відомий вислів видатного математика М. Є. Жуковського: «У математиці є також своя краса, як і в живопису та поезії».

ЛІТЕРАТУРА

1. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. — М. : Просвещение, 1981.
2. *Пометун О. І.* Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання.— К. : А.С.К., 2004.
3. *Математика.* Дитяча енциклопедія / Автор-упорядник А. П. Савін. — К. : Школа, 2002.
4. *Математический* энциклопедический словарь / Под ред. Прохорова Ю. В. — М. : Советская энциклопедия, 1988.
5. *Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В.* Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. — Х. : Ранок, 2009.

СТВОРЮЄМО СЦЕНАРІЙ ЗАХОДУ

Пропонуємо матеріали, які можна використовувати

- ✓ ***для створення сценаріїв позакласних заходів,***
- ✓ ***на заняттях гуртків і факультативів,***
- ✓ ***для індивідуальної роботи з учнями,***
- ✓ ***для проведення дидактичних ігор на уроках.***

ЧИ МОЖЕ…? ЧИ ЗАВЖДИ…?

Алгебра

1. Чи може сума будь-яких двох взаємно обернених додатних чисел бути меншою ніж 2? (*Ні*)
2. Чи може множина розв'язків системи нерівностей складатися з одного числа? (*Так*)
3. Чи може нерівність $\left|f(x)\right|<0$ мати розв'язки? (*Ні*)
4. Чи може нерівність $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 1$ бути правильною при всіх значеннях x? (*Так, наприклад,* $\dfrac{(x^2+4)(x^2+1)}{x^2+4}\geq 1$ *при будь-яких значеннях* x.)
5. Чи може область значень функції складатися з одного числа? (*Так, наприклад, якщо* $k=0$, *то область значень функції* $y=kx+b$ *складається з одного числа* b.)
6. Чи може функція бути ні зростаючою, ні спадною? (*Так*)
7. Чи може ймовірність випадкової події дорівнювати $\dfrac{3}{2}$? (*Ні*)
8. Чи завжди з того, що $a>b$ випливає, що $ac>bc$? (*Ні, тільки, якщо* $c>0$.)
9. Чи завжди з того, що $a>b$ випливає, що $2a+1>2b$? (*Так*)
10. Чи завжди з того, що $b>a$ випливає, що $\dfrac{b}{a}>1$? (*Ні, тільки, якщо* $a>0$ *і* $b>0$.)
11. Чи завжди система нерівностей має розв'язки? (*Ні*)
12. Чи завжди функція $y=ax^2$ зростає на проміжку $(0;+\infty)$? (*Ні, тільки, якщо* $a>0$.)

Геометрія

1. Чи може $\sin\alpha$ дорівнювати 2? (*Ні*)
2. Чи може косинус кута трикутника дорівнювати від'ємному числу? (*Так*)
3. Чи може площа трикутника дорівнювати половині добутку його сторін? (*Так, якщо трикутник прямокутний.*)
4. Чи можуть збігатися центри вписаного і описаного кіл многокутника? (*Так, якщо многокутник правильний.*)
5. Чи може кут правильного многокутника дорівнювати $163°$? (*Ні*)
6. Чи може довжина кола бути в 4 рази більшою за його діаметр? (*Ні*)
7. Чи може графік рівняння $ax+by=c$ задавати вертикальну пряму? (*Так, якщо* $b=0$, $a\neq 0$, c *— будь-яке.*)
8. Чи може сума двох ненульових векторів дорівнювати нулю? (*Так*)
9. Чи може $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ дорівнювати $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$? (*Так, якщо* $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.)
10. Чи може скалярний добуток векторів дорівнювати нулю? (*Так*)
11. Чи завжди $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ дорівнює одиниці? (*Так*)
12. Чи завжди синуси суміжних кутів рівні? (*Так*)
13. Чи завжди правильний многокутник є опуклим? (*Так*)
14. Чи завжди медіана трикутника ділить кут при вершині на частини, синуси яких пропорційні синусам кутів при основі. (*Так*)
15. Чи завжди бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, обернено пропорційні синусам прилеглих кутів. (*Так*)

ЧИ ПРАВИЛЬНО, ЩО…

1. Якщо $a>b$ і $c<0$, то $ac<bc$. (*Так*)
2. Якщо $ab>0$ і $a>b$, то
$$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}.$$
(*Ні, за таких умов* $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.)
3. Графік функції $y=f(ax)$ можна дістати шляхом паралельного перенесення графіка функції $y=f(x)$ вздовж осі Ox на a одиниць. (*Ні*)
4. Графік функції $y=x^2+x+2$ не перетинає вісь абсцис. (*Так*)
5. Існує кут, синус і косинус якого рівні. (*Так*)
6. Якщо модулі векторів рівні, то і вектори рівні. (*Ні, рівні вектори мають бути ще й співнапрямленими.*)
7. Якщо вектори рівні, то їх модулі рівні. (*Так*)
8. Скалярним добутком векторів є число. (*Так*)

ЧИ ВІРИТЕ ВИ, ЩО…

1. Прямокутну систему координат називають декартовою тому, що вона побудована за принципом географічної карти. (*Ні, декартовою її називають за прізвищем французького математика Рене Декарта, який уперше застосував координати у своїх дослідженнях.*)
2. Крім прямокутної, існують косокутна, сферична, циліндрична, полярна системи координат. (*Так*)
3. Сучасне позначення синуса — sin увів 1748 року Леонард Ейлер. (*Так*)
4. Слова «тангенс» і «танго» походять від одного й того самого латинського слова «дотикатися». (*Ні, танок танго започаткували африканці, тому слово «танго» має африканське походження і, найімовірніше, означає «коло», «закрите місце».*)
5. На честь числа π було знято художній фільм. (*Так, повнометражний художній фільм «π (пи)» американського режисера Даррена Аронофскі.*)
6. Якщо чотирикутник є і вписаним, і описаним, то його площу можна знайти за формулою
$$S=\sqrt{abcd},$$
де a, b, c, d — довжини його сторін. (*Так*)

СІМ ЗАПИТАНЬ — ОДНА ВІДПОВІДЬ

1. Геометрична фігура.
2. Може бути рівнобедреним.
3. Сума двох його кутів дорівнює третьому.
4. Якщо він вписаний у коло, то одна з його сторін є діаметром цього кола.
5. Його площа може дорівнювати половині добутку його сторін.
6. Деякі з них називають єгипетськими.
7. Для нього виконується теорема Піфагора.

Відповідь. Прямокутний трикутник.

1. Слово, що означає це поняття, має багато значень.
2. Діяльність, обов'язок.
3. Призначення, роль.
4. Вид зв'язку між об'єктами, коли зміна одного з них приводить до зміни іншого.
5. У математиці — поняття, що відображає зв'язок між елементами множин.
6. Це поняття увів у математику Г. Лейбніц.
7. Закон, за яким кожному елементу однієї множини ставиться у відповідність елемент іншої множини.

Відповідь. Функція.

1. Може бути прямою, може — кривою.
2. Може складатися з декількох частин.
3. Не може бути колом.
4. Його завжди будують на координатній площині.
5. За його виглядом можна робити висновки щодо властивостей функцій.
6. За його допомогою можна розв'язувати рівняння і нерівності.
7. Його має функція.

Відповідь. Графік функції.

ЛАНЦЮЖКИ

Ланцюжок правильних рівностей

Напишіть у квадратик величину кута, щоб утворився ланцюжок правильних рівностей.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\square = \sin\square = \cos\square = -\cos\square$$

Напишіть у квадратик величину кута, щоб утворився ланцюжок правильних рівностей.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\square = \sin\square = \cos\square = -\cos\square$$

Напишіть у квадратик величину кута, щоб утворився ланцюжок правильних рівностей.

$$\frac{1}{2} = \sin\square = \sin\square = \cos\square = -\cos\square$$

Напишіть у квадратик величину кута, щоб утворився ланцюжок правильних рівностей.

$$1 = \sin\square = \cos\square = -\cos\square$$

Ланцюжок перетворень графіків функцій

Заповніть порожні місця в ланцюжку перетворення графіка функції $f(x)$.

$$\boxed{f(x)} \xrightarrow{\text{ліворуч на 2 од.}} \boxed{} \xrightarrow{\text{униз на 4 од.}} \boxed{}$$

Заповніть порожні місця в ланцюжку перетворення графіка функції $f(x)$.

$$\boxed{f(x)} \xrightarrow{\text{праворуч на 3 од.}} \boxed{} \xrightarrow{\text{угору на 6 од.}} \boxed{}$$

Заповніть порожні місця в ланцюжку перетворень графіка функції

$$\boxed{f(x)} \xrightarrow{\boxed{}} \boxed{f(x-5)} \xrightarrow{\boxed{}} \boxed{f(x-5)+3}$$

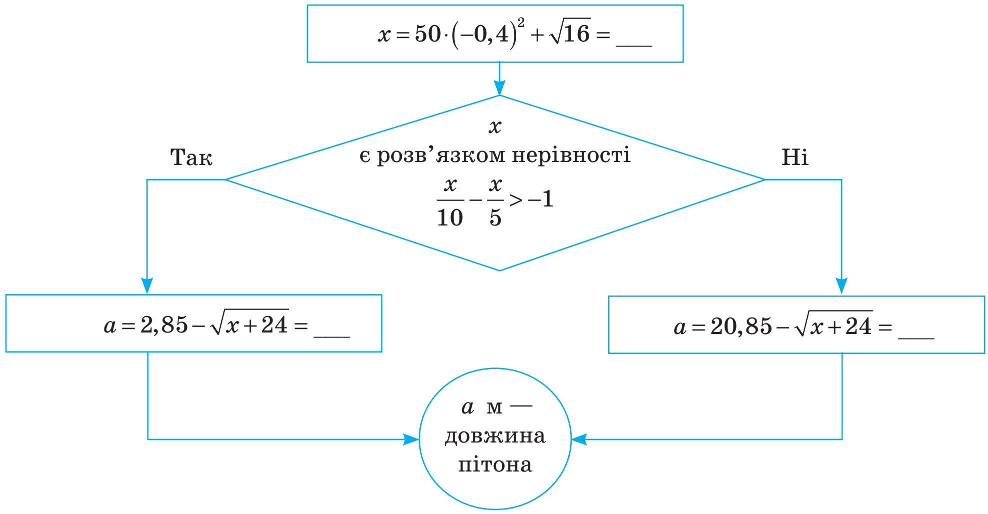
Заповніть порожні місця в ланцюжку перетворень графіка функції

$$\boxed{f(x)} \xrightarrow{\boxed{}} \boxed{f(x+7)} \xrightarrow{\boxed{}} \boxed{f(x+7)-2}$$

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

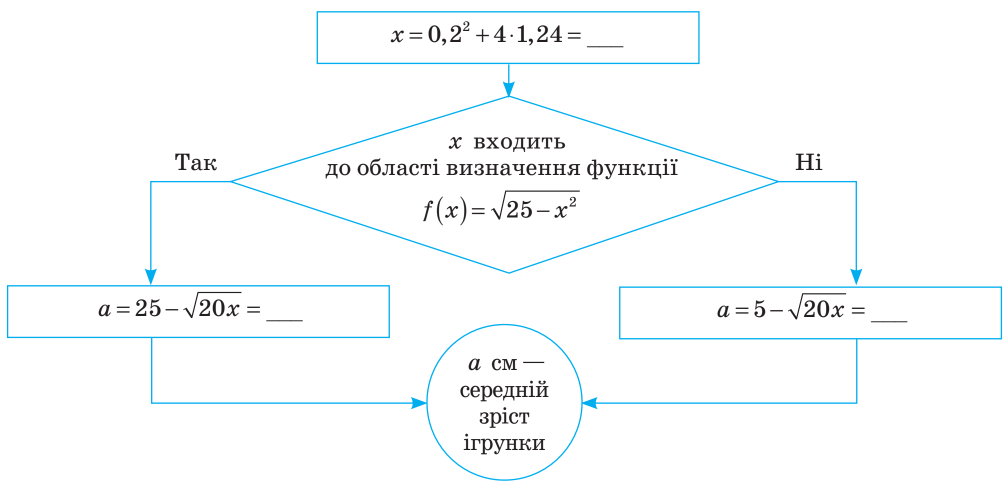
Найбільший пітон

Пітони — неотруйні змії. Мешкають у тропічних зонах Африки, Південно-Східної Азії. Зазвичай довжина пітонів коливається в межах від 5 до 10 м. Нещодавно в Індонезії спіймали пітона, маса якого сягає 447 кг. На сьогодні цю змію вважають найбільшою на планеті.
Скориставшись схемою, дізнайтеся, яку довжину має найбільший на планеті пітон.



Ігрункові

Ігрункові — родина приматів, що належить до широконосих мавп. Вони живуть на деревах і пересуваються за допомогою стрибків і горизонтального бігання по гілках. Їжа ігрункових складається переважно чином із комах, крім цього, вони вживають нектар, м'які фрукти і соки дерев. Ігрункові нарівні з карликовими лемурами є найменшими за розмірами приматами. Скориставшись схемою, дізнайтеся, який середній зріст (у сантиметрах) мають ігрунки.



ГЕОМЕТРІЯ + АЛГЕБРА

Поставте у відповідну комірку таблиці позначку «V», якщо твердження правильне.

1	Многокутник називають правильним, якщо в нього всі сторони рівні	
2	Довжину C кола радіуса R обчислюють за формулою $C=2\pi R$	
3	Радіус кола, вписаного в правильний чотирикутник, удвічі менший від сторони цього чотирикутника	
4	Радіус кола, заданого рівнянням $(x-a)^2+(y-b)^2=4$, дорівнює 4	
5	Якщо в трикутнику відомі сторона і два кути, то щоб знайти решту сторін трикутника, доцільно застосувати теорему синусів	

Упишіть у квадратик кількість правильних тверджень і розв'яжіть утворену нерівність: $2x-\square\leq\square x-8$.

____

Поставте у відповідну комірку таблиці позначку «V», якщо твердження правильне.

1	Ромб є правильним многокутником	
2	Довжина будь-якого кола більша за його діаметр у π разів	
3	Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, удвічі більший, ніж радіус кола, вписаного в цей трикутник	
4	Ненульові вектори називають рівними, якщо їх модулі рівні	
5	Довжину відрізка з кінцями в точках $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ знаходять так: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	

Упишіть у квадратик кількість правильних тверджень і розв'яжіть утворену нерівність: $x-5\cdot\square\geq 4x+\square$.

____

Поставте у відповідну комірку таблиці позначку «V», якщо твердження правильне.

1	Многокутник називають правильним, якщо в нього всі кути рівні	
2	Центром кола, заданого рівнянням $x^2+y^2=R^2$, є початок координат	
3	Скалярним добутком двох векторів є число	
4	Будь-який діаметр кола є його віссю симетрії	
5	Якщо в трикутнику відомі дві сторони і кут між ними, то щоб знайти третю сторону трикутника, доцільно застосувати теорему косинусів	

Упишіть у квадратик кількість правильних тверджень і розв'яжіть утворену нерівність: $x^2-\square x-5<0$.

____

PROGRESSIO — ЦЕ РУХ УПЕРЕД

Укладач О. О. Старова, м. Харків

Однією з найцікавіших у курсі алгебри 9 класу є тема «Числові послідовності». Пропонуємо матеріали з цієї теми, що можуть стати в пригоді вчителям під час створення сценаріїв позакласних заходів, розробок занять гуртка, підготовки до олімпіад, до підсумкової атестації тощо.

ЛІРИЧНІ РЯДКИ

Прогресії

Прогресія — наче процесія,
бо члени — один за одним…
А ще вона, наче поезія —
із періодичністю рим.
А ще вона — наче дорога,
упорядкована множина —
пряма і довершено строга.
Хоч є і у ній двоїна:
буває звичайна регресія,
а вчитель говорить: «Прогресія»,
додаючи: «Спадна»…

Г. П. Бевз

ІЗ ІСТОРІЇ ПОНЯТТЯ

Про числові послідовності

Слово «прогресія» латинського походження (progressio) і буквально означає «рух уперед», як і слово «прогрес». Уперше цей термін застосував Аніцій Боецій (V–VI ст.) — римський державний діяч, філософ, математик, теоретик музики, автор багатьох філософських та наукових праць.

Спочатку прогресією вважали будь-яку числову послідовність, побудовану за законом, що дозволяє необмежено продовжувати її в одному напрямі, наприклад, послідовності натуральних чисел, їхніх квадратів, кубів тощо. У середні віки і на початку нового часу цей термін припиняє бути загальновживаним. У XVII ст., наприклад, Дж. Григорі вживає замість прогресії термін «ряд», а інший видатний англійський математик Дж. Валліс застосовує для нескінченних рядів термін «нескінченні прогресії».

Сьогодні ми розглядаємо прогресії як окремі випадки числових послідовностей, а останні — як окремі випадки функцій. Числова послідовність — це функція натурального аргумента.

Поняття числової послідовності виникло й розвивалося задовго до створення вчення про функцію. Приклади числових послідовностей, відомих у давнину:

1) послідовність натуральних чисел: 1, 2, 3, 4, 5, …;
2) послідовність парних чисел: 2, 4, 6, 8, 10,…;
3) послідовність непарних чисел: 1, 3, 5, 7, 9, …;
4) послідовність квадратів натуральних чисел: 1, 4, 9, 16, 25, …;
5) послідовність простих чисел: 2, 3, 5, 7, 11, …

Кількість членів кожного з цих рядів є нескінченною. Усі наведені послідовності, крім 5-ої, можна вважати заданими, оскільки для кожної з них відомий загальний член, тобто правило знаходження члена з будь-яким номером. Для послідовності простих чисел загальний член невідомий, але ще в III ст. до н. е. александрійський учений Ератосфен навів спосіб (щоправда, дуже громіздкий) знаходження n-го її члена. Цей спосіб називають «решето Ератосфена».

Прогресії як окремі види числових послідовностей зустрічаються в творах II тисячоліття до н. е.

Арифметична прогресія в давнину

У клинописних табличках вавилонян, у єгипетських папірусах (II тисячолітті до н. е.) зустрічаються приклади арифметичних і геометричних прогресій.

Приклад вавилонської задачі

Задача. «10 братів, $1\frac{2}{3}$ міни срібла. Брат над братом піднімається, на скільки піднімається, не знаю. Частина восьмого — 6 шекелів. Брат над братом — на скільки він вищий?»

(Зауваживши, що міна срібла дорівнює 60 шекелів, можна запропонувати розв'язати цю задачу сучасним школярам, скориставшись відомими сьогодні алгебраїчними формулами.)

Вавилонський автор, який не мав ні сучасної символіки, ні готових формул, вимушений був застосовувати строго арифметичні міркування.

Приклад єгипетської задачі з папірусу Ахмеса

Задача. «Нехай тобі сказано: розділи 10 мір ячменю між 10 людьми так, щоб різниця між кожною людиною і її судом дорівнювала $\frac{1}{8}$ міри».

Розв'язуючи цю й інші аналогічні задачі, єгиптяни, напевно, користувались правилом, яке в сучасному вигляді можна записати так:

$$a=\frac{S}{n}-(n-1)\frac{d}{2}.$$

Воно еквівалентне нашій формулі

$$S=\frac{a+b}{2}n.$$

Походження цього правила не встановлено: воно, ймовірно, має емпіричний характер.

Задачі на арифметичні і геометричні прогресії наведені і в давньокитайському трактаті «Математика в дев'яти книгах», у якому відсутні вказівки на застосування будь-яких формул для обчислення суми членів прогресії.

Геометрична прогресія в давнину і в середні віки

У папірусі Ахмеса є задача, у якій потрібно знайти суму n членів геометричної прогресії, знаючи її перший член і знаменник.

В одній вавилонській клинописній табличці йдеться про підсумовування геометричної прогресії:

$$1+2+2^2+\ldots+2^9.$$

Розв'язання і відповідь

$$S=512+(512-1),$$

наведені в табличці, дають підстави вважати, що автор користувався формулою

$$S=2^n+(2^n-1),$$

але про те, як він дійшов цього висновку, до сьогодні нічого не відомо.

Популярною є задача-легенда, що, як вважають, належить до початку нашої ери.

«Індійський цар Шерам запросив до себе винахідника шахів Сету, щоб нагородити його за дотепну вигадку. Сета, знущаючись над царем, зажадав за першу клітинку шахової дошки 1 пшеничне зерно, за другу — 2 зерна, за третю — 4 зерна тощо. З'ясувалося, що цар не був у змозі виконати це «скромне» бажання Сети».

У цій задачі йдеться про підсумовування геометричної прогресії 1, 2, 2^2, $2^3, \ldots,$ 2^{63}. Її сума дорівнює

$$2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Таку кількість зерен пшениці можна зібрати лише з врожаю планети, поверхня якої приблизно в 2000 разів більша за всю поверхню Землі.

Знаходженням суми членів геометричних (і арифметичних) прогресій, що не завжди відповідають практичним потребам людей, переймались багато хто з любителів математики впродовж давніх і середніх віків. Але вперше задачі на прогресії виникли завдяки спостереженням над явищами природи, дослідженню суспільно-економічних явищ, до яких можна було застосувати закони арифметичної або геометричної прогресії.

Розвиток вчення про прогресії

Теоретичні відомості щодо прогресій уперше зустрічаються у відомих нам документах Стародавньої Греції.

У «Псамміті» («Обчислення піщинок») Архімед уперше зіставив арифметичну і геометричну прогресії:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \\ 10, & 10^2, & 10^3, & 10^4, & 10^5, & \ldots \end{array}$$

і вказав на зв'язок між ними, наприклад,

$$10^3\cdot10^5=10^{3+5}=10^8,$$

тобто для множення двох членів геометричної прогресії досить додати відповідні члени арифметичної прогресії і взяти здобуту суму за показник 10.

У греків теорія геометричних прогресій була пов'язана з так званою неперервною геометричною пропорцією $a:b=b:c$, у якій числа a, b, c утворюють геометричну прогресію зі знаменником $\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Аналогічно в неперервній арифметичній пропорції $a-b=b-c$ числа a, b, c утворюють арифметичну прогресію з різницею $\frac{c-b}{2}$.

Прогресії розглядали немовби продовження пропорцій, тому назви «арифметична» і «геометрична» були перенесені з пропорцій на прогресії.

У «Началах» Евкліда є теорема, яка по суті еквівалентна знайомій нам формулі для обчислення суми членів геометричної прогресії:

$$S_n=\frac{lq-a}{q-1}.$$

Одне з доведень Архімеда, викладене в його творі «Квадратура параболи», зводиться до підсумовування нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$a+\frac{a}{4}+\frac{a}{4^2}+\frac{a}{4^3}+\ldots=\frac{a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}a.$$

Для розв'язання деяких задач із геометрії і механіки Архімед вивів формулу суми квадратів натуральних чисел:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Деякі формули, що стосуються прогресій, були відомі китайським та індійським ученим. Так, Аріабхатта (V ст.) знав формули для загального члена, обчислення суми арифметичної прогресії.

Але правило для знаходження суми членів довільної арифметичної прогресії вперше зустрічається в «Книзі абака» (1202) Леонардо Пізанського.

У «Науці про числа» (1484) Н. Шюке виклав загальне правило для підсумовування будь-якої нескінченно спадної геометричної прогресії. Формула для підсумовування будь-якої нескінченно спадної геометричної прогресії була відома П. Ферма й іншим ученим XVII ст.

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ І ТРИКУТНИК

Наведені задачі об'єднує умова: довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію. Тобто ці задачі поєднують знання геометрії трикутника та арифметичної прогресії.

Задача 1

Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Обчисліть площу трикутника, якщо більший катет дорівнює 4.

Розв'язання

Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку катетів. Позначимо сторони трикутника $a-d$, a, $a+d$, де d — різниця арифметичної прогресії. Тоді

$$S=\frac{1}{2}a(a-d)=\frac{1}{2}\left(a^2-ad\right).$$

За умовою задачі більший катет дорівнює 4, тобто $a=4$. Тоді за теоремою Піфагора

$$(a-d)^2+4^2=(a+d)^2,$$

звідки

$$a^2-2ad+d^2+4^2=a^2+2ad+d^2,$$

$$4^2=4ad,$$

$$ad=4.$$

Підставивши це значення у формулу для обчислення площі, дістанемо

$$S=\frac{1}{2}\left(a^2-ad\right)=\frac{1}{2}\left(4^2-4\right)=6.$$

Відповідь. 6.

Задача 2

Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Обчисліть периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 10.

Розв'язання

Нехай гіпотенуза трикутника дорівнює a. Тоді катети дорівнюють $a-d$, $a-2d$. За теоремою Піфагора

$$(a-d)^2+(a-2d)^2=a^2.$$

Ураховуючи, що $a=10$, дістанемо

$$(10-d)^2+(10-2d)^2=10^2,$$

звідки

$$10^2-20d+d^2+10^2-40d+4d^2=10^2,$$

$$5d^2-60d+100=0,$$

$$d^2-12d+20=0.$$

Розв'язавши це квадратне рівняння, дістанемо $d_1=2$, $d_2=10$. Значення $d_2=10$ не задовольняє умову задачі.

Отже, сторони трикутника дорівнюють 8, 6, 10, а його периметр дорівнює $6+8+10=24$.

Відповідь. 24.

Задача 3

Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Обчисліть менший катет трикутника, якщо площа трикутника дорівнює 54.

Розв'язання

Нехай сторони трикутника дорівнюють $a-d$, a, $a+d$. Тоді площу трикутника можна обчислити за формулою

$$S=\frac{1}{2}a(a-d).$$

За умовою

$$\frac{1}{2}a(a-d)=54 \text{ або } a^2-ad=108.$$

За теоремою Піфагора

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2,$$

$$a^2-2ad+d^2+a^2=a^2+2ad+d^2,$$

$$a^2-4ad=0.$$

Дістали систему рівнянь

$$\begin{cases}a^2-ad=108,\\ a^2-4ad=0,\end{cases} \begin{cases}a(a-d)=108,\\ a(a-4d)=0,\end{cases} \begin{cases}a(a-d)=108,\\ a=4d,\end{cases}$$

$$\begin{cases}4d\cdot 3d=108,\\ a=4d,\end{cases} \begin{cases}d=3,\\ a=12,\end{cases}$$

(під час розв'язування системи врахували, що $a>0$, $d>0$).

Отже, менший катет трикутника дорівнює

$$12-3=9.$$

Відповідь. 9.

Задача 4

Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Обчисліть його периметр, якщо площа трикутника дорівнює 96.

Розв'язання задачі аналогічне до розв'язання попередньої задачі.

Відповідь. 48.

Задача 5

Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Обчисліть периметр трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 5.

Розв'язання

Оскільки медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює половині гіпотенузи, то за умовою задачі гіпотенуза дорівнює $2\cdot 5=10$.

Далі див. розв'язання задачі 2.

Відповідь. 24.

Задача 6

Довжини сторін трикутника, один із кутів якого дорівнює $120°$, утворюють арифметичну прогресію, другий член якої дорівнює 5. Обчисліть площу трикутника.

Розв'язання

Нехай сторони трикутника дорівнюють $5-d$, 5, $5+d$. Зауважимо, що найбільша сторона завдовжки $5+d$ лежить проти кута $120°$. Тоді за теоремою косинусів

$$(5-d)^2+5^2-2\cdot 5\cdot(5-d)\cdot\cos 120°=(5+d)^2.$$

Оскільки

$$\cos 120°=-\frac{1}{2},$$

то

$$(5-d)^2+5^2+5\cdot(5-d)=(5+d)^2,$$

звідки

$$25-10d+d^2+25+25-5d=25+10d+d^2,$$

$$25d=50, \quad d=2.$$

Тоді сторони трикутника, що утворюють кут $120°$, дорівнюють $5-2=3$ і 5, а площа трикутника

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\sin 120°=\frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Відповідь. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Задача 7

Довжини сторін трикутника, один із кутів якого дорівнює $120°$, утворюють арифметичну прогресію із різницею 1. Знайдіть периметр трикутника.

Розв'язання

Нехай довжини сторін дорівнюють a, $a+1$, $a+2$. Зауважимо, що найбільша сторона завдовжки $a+2$ лежить проти кута $120°$. Тоді за теоремою косинусів

$$a^2+(a+1)^2-2\cdot a\cdot(a+1)\cdot\cos 120°=(a+2)^2.$$

Оскільки

$$\cos 120°=-\frac{1}{2},$$

то

$$a^2+(a+1)^2+a(a+1)=(a+2)^2,$$

$$a^2+a^2+2a+1+a^2+a=a^2+4a+4,$$

$$2a^2-a-3=0,$$

звідки

$$a_1=-1,\quad a_2=1{,}5.$$

Значення $a_1=-1$ не задовольняє умову задачі. Отже,

$$a=1{,}5,\quad a+1=2{,}5,\quad a+2=3{,}5$$

і периметр трикутника дорівнює

$$1{,}5+2{,}5+3{,}5=7{,}5.$$

Відповідь. 7,5.

Задача 8

За якої умови три числа, що утворюють арифметичну прогресію, можуть виражати довжини сторін трикутника?

Розв'язання

Нехай у трикутнику

$$a>b>c,$$

причому a, b, c утворюють арифметичну прогресію з різницею d. Тоді прогресію можна подати так: c,

$$b=c+d,\quad a=c+2d.$$

За властивістю сторін трикутника

$$c>a-b,$$

тобто $c>d$. Отже, щоб числа, що утворюють арифметичну прогресію, могли виражати довжини сторін трикутника, необхідно, щоб різниця прогресії була меншою від найменшої сторони трикутника.

ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ НА АРИФМЕТИЧНУ І ГЕОМЕТРИЧНУ ПРОГРЕСІЇ

1. Тіло за першу секунду руху подолало 7 м, а кожної наступної секунди — на 3 м більше ніж попередньої. Яку відстань подолало тіло за восьму секунду?
Відповідь. 28 м.
2. Потяг, відійшовши від станції, рівномірно збільшував швидкість на 50 м за хвилину. Якою була швидкість потяга в кінці двадцятої хвилини?
Відповідь. 60 км/год.
3. У швейному цеху в січні пошили 106 курток, а кожного наступного місяця шили на 12 курток більше ніж попереднього. Скільки курток пошили в червні? у грудні?
Відповідь. 166 курток; 250 курток.
4. Під час вільного падіння тіло подолало за першу секунду 5 м, а кожної наступної — на 10 м більше ніж попередньої. Знайдіть глибину шахти, якщо тіло, що вільно падає, досягло її дна через 5 с після початку падіння.
Відповідь. 125 м.
5. Кулі розміщені у формі трикутника так, що в першому ряду лежить одна куля, у другому — дві, у третьому — три тощо (див. рис.). У скільки рядів розміщені кулі, якщо їхня кількість дорівнює 120? Скільки знадобиться куль, щоб скласти трикутник із 30 рядів?

Відповідь. 15 рядів; 465 куль.
6. У змаганнях зі стрільби за кожний промах у серії з 25 пострілів стрілець отримував штрафні очки: за перший промах 1 очко, за кожний наступний на 0,5 очка більше, ніж за попередній. Скільки разів улучив у ціль стрілець, який отримав 7 штрафних очок?
Відповідь. 21 раз.

7. Альпіністи в перший день сходження піднялись на висоту 1400 м, а потім кожного наступного дня вони долали відстань на 100 м меншу, ніж попереднього. За скільки днів вони підкорили висоту в 5000 м?
Відповідь. За 4 дні.
8. Ракета за першу секунду пролетіла 300 м. Кожної наступної секунди ракета пролітала на 200 м більше, ніж попередньої. Яку відстань (у кілометрах) пролетіла ракета за 6 с?
Відповідь. 4,8 км.
9. У збірнику для підготовки до іспиту з математики розміщено 240 задач. Валерій планує розпочати їх розв'язувати 2 травня, а закінчити 16 травня, розв'язуючи щодня на дві задачі більше ніж попереднього дня. Скільки задач Валерій запланував розв'язати 12 травня?
Відповідь. 22 задачі.
10. Курс повітряних ванн починають із 15 хв і збільшують час цієї процедури щодня на 10 хвилин. Скільки днів слід приймати ванни в зазначеному режимі, щоб досягти їхньої максимальної тривалості 1 година 45 хвилин?
Відповідь. 10 днів.
11. Туристи запланували пройти по річці 140 км. Скільки днів туристи будуть у поході, якщо першого дня вони пройшли 5 км, а кожного наступного дня вони проходитимуть відстань на 2 км більшу, ніж попереднього?
Відповідь. 10 днів.
12. Кожні 15 хв у басейн подається на 5 $м^3$ води більше, ніж за попередні 15 хв. За який час (у хвилинах) басейн буде заповнено, якщо об'єм басейну дорівнює 675 $м^3$, а за перші 15 хв у басейн подано 10 $м^3$ води?
Відповідь. За 225 хв.
13. Із 1 по 12 липня включно температура повітря щодобово підвищувалася в середньому на $\frac{1}{2}{}^\circ$C. Яка температура повітря була 1 липня, якщо середня температура за вказаний період дорівнювала $18\frac{3}{4}{}^\circ$C?
Відповідь. 16°.
14. Із 1 по 16 січня включно температура повітря щодобово знижувалася в середньому на $\frac{1}{2}{}^\circ$C. Яка температура повітря була 1 січня, якщо середня температура за вказаний період дорівнювала $-20\frac{3}{4}{}^\circ$C?
Відповідь. −17°C.
15. Наклад однієї популярної газети щомісячно збільшується на 200 примірників. Скільки примірників цієї газети буде випущено за рік, якщо в січні цього року її наклад становив 5200 примірників?
Відповідь. 75 600 примірників.
16. У Петрика є 70 кубиків, із яких він хоче побудувати «споруду» з 8 ярусів. У першому ярусі — 16 кубиків, а в кожному наступному — на 2 кубики менше. Чи вистачить Петрику кубиків, щоб завершити будівництво своєї споруди?
Відповідь. Ні, йому не вистачить 2-х кубиків.
17. Кожні 20 хв автомобіль збільшував швидкість на 9 км/год. За який час він проїхав 288 км, якщо перші 20 хв він рухався зі швидкістю 60 км/год? Відповідь запишіть у годинах. (Вважаємо, що швидкість автомобіль збільшує миттєво.)
Відповідь. За 3 год.
18. Кожні 15 хв мотоцикліст збільшував швидкість удвічі. За який час він проїхав 45 км, якщо перші 15 хв він рухався зі швидкістю 12 км/год? Відповідь запишіть у годинах. (Вважаємо, що швидкість мотоцикліст збільшує миттєво.)
Відповідь. За 1 год.
19. Вкладник поклав у банк 5000 грн на рахунок, за яким сума внеску щороку збільшується на 8 %. Яка сума буде на його рахунку через 6 років?
Відповідь. Приблизно 7934 грн.

ЛІТЕРАТУРА

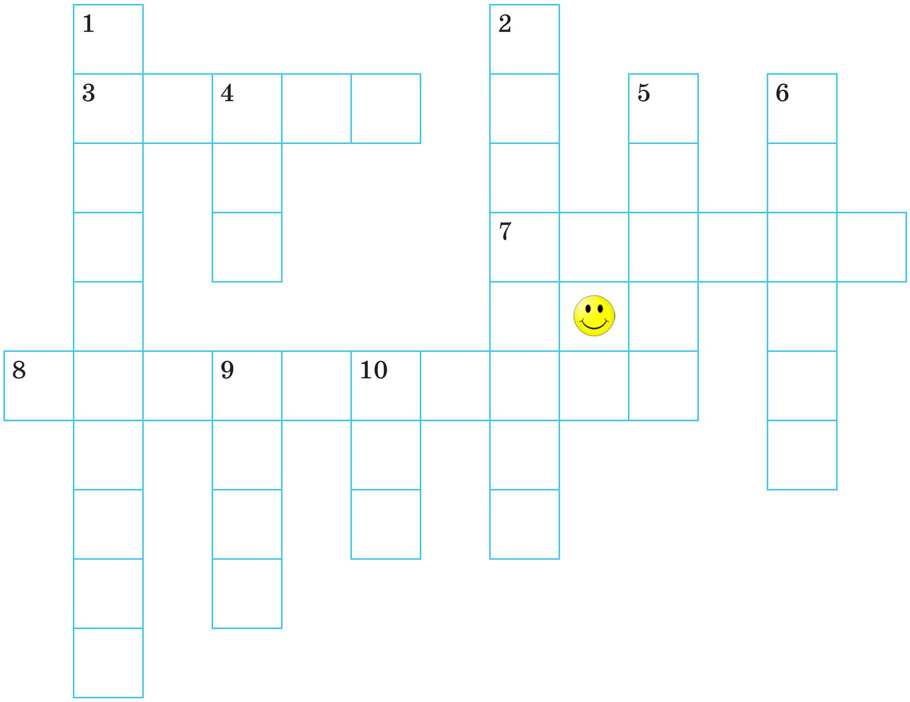
1. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. — М. : Просвещение, 1982.
2. *Старова О. О., Маркова І. С.* Готуємось до державної підсумкової атестації, зовнішнього незалежного оцінювання з математики. — Х. : Видавнича група «Основа», 2008.
3. http://yukhym.com/uk/matematika/arifmetichna-progresiya-i-trikutnik.html
4. http://5fan.ua/wievjob.php?id=55425

МАТЕМАТИКА-9 У КРОСВОРДАХ

С. О. Кулік, м. Харків

НЕРІВНОСТІ

Увага! Числа, що є відповідями на запитання кросворду, потрібно записувати словами.



По вертикалі

1. Сума цілих розв'язків нерівності

$$-6 \le x-4 < 2.$$

2. Кількість цілих розв'язків систем нерівностей

$$\begin{cases} x+4 \ge -6, \\ 2x-5 < 15. \end{cases}$$

4. Довжина проміжку, що є розв'язком системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x-5 \le 1, \\ x-3 \ge -7. \end{cases}$$

5. Модуль суми цілих від'ємних розв'язків нерівності

$$3(x-1) < 4(x+0{,}25).$$

6. Найбільший цілий розв'язок нерівності

$$7(x+2)-3(x+8) < 10.$$

9. Найменший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{4x+8}{5}-\frac{3-2x}{2} > \frac{x}{10}.$$

10. Кількість цілих від'ємних розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 4x-3 < 1, \\ 3-x \le 4. \end{cases}$$

По горизонталі

3. Кількість натуральних розв'язків нерівності

$$2 < x+10 \le 18.$$

7. Сума натуральних розв'язків нерівності

$$|x-1| \le 3.$$

8. Кількість цілих розв'язків нерівності

$$|x| < 6.$$

КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

Увага! Числа, що є відповідями на запитання кросворду, потрібно записувати словами.

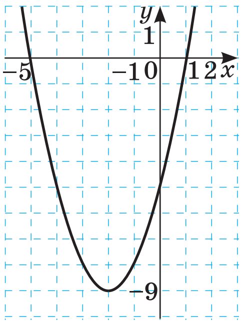
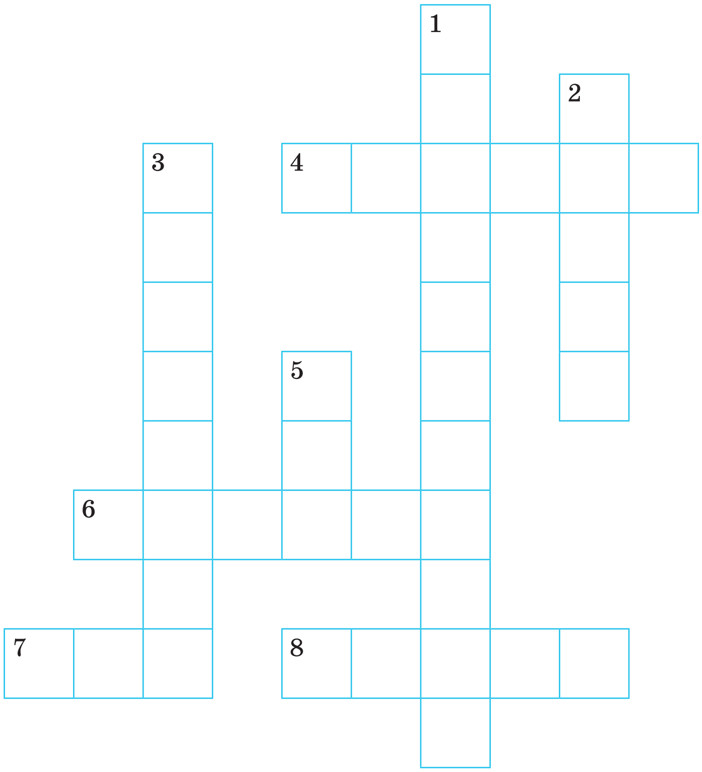


Рис. 1



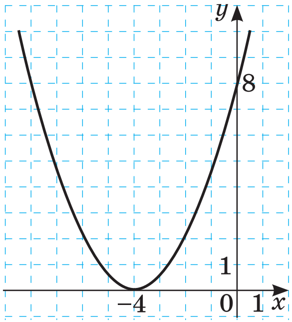


Рис. 2

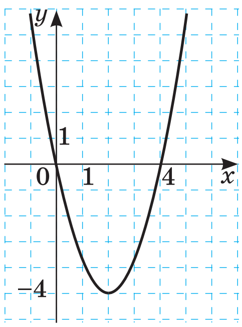


Рис. 3

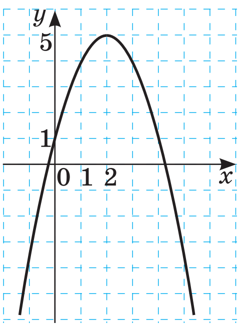


Рис. 6

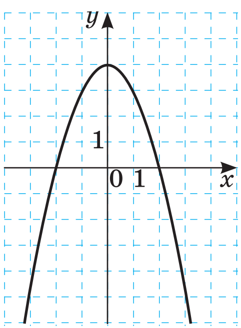


Рис. 4

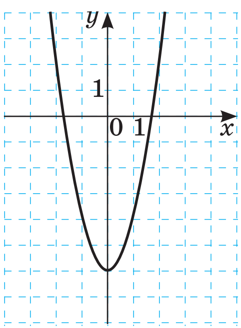
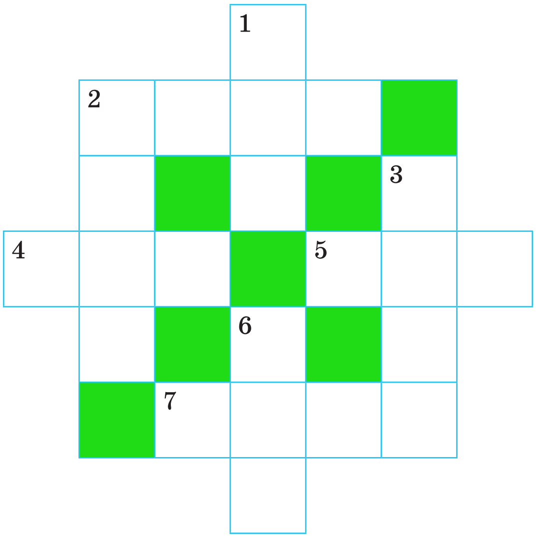


Рис. 5

1. Назва функції, графік якої зображено на рисунку 1.
2. Значення функції, графік якої зображено на рисунку 2, якщо аргумент дорівнює нулю.
3. Назва графіка квадратичної функції.
4. «Зображення» функції.
5. Кількість цілих значень аргумента, при яких функція, графік якої зображено на рисунку 3, набуває від'ємних значень.
6. Найбільше значення функції, графік якої зображено на рисунку 4.
7. Кількість нулів функції, графік якої зображено на рисунку 5.
8. Знак коефіцієнта a у формулі $y=ax^2+bx+c$, що задає функцію, графік якої зображено на рисунку 6.

ПРОГРЕСІЇ

Увага! Числа, що є відповідями на запитання кросворду, потрібно записувати цифрами.



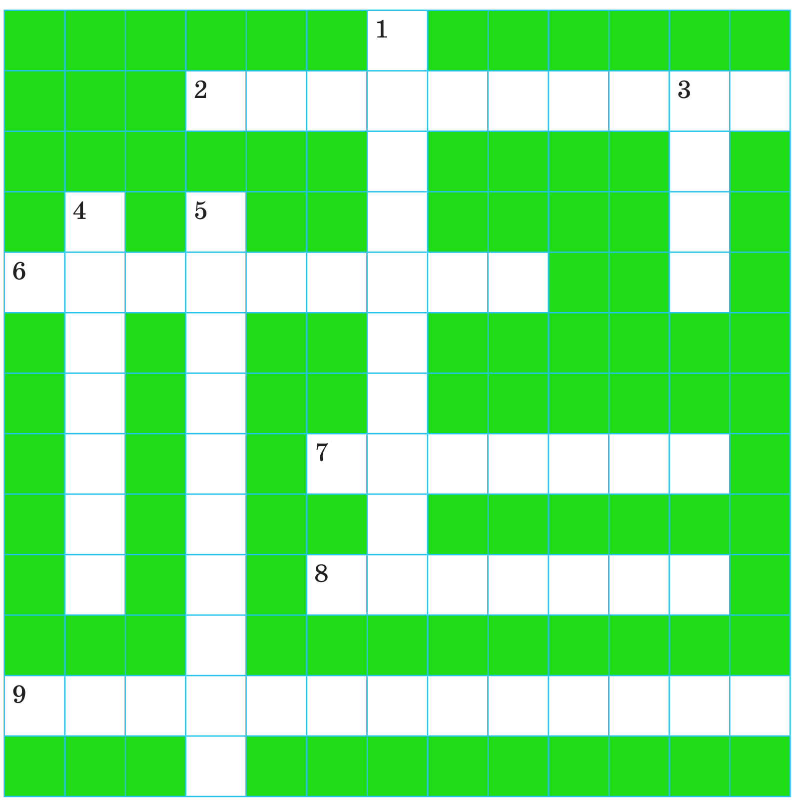
По вертикалі

1. 44-й член послідовності 35; 38; 41; ...
2. Сума трьох членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 152$, $q = 2$.
3. Сума чотирьох членів геометричної прогресії, перший член якої дорівнює 89, а кожний наступний утричі більший ніж попередній.
6. Перший член геометричної прогресії зі знаменником $\frac{1}{3}$, четвертий член якої дорівнює 4.

По горизонталі

2. Сума 26-и членів послідовності 13; 18; 23; ...
4. 25-ий член послідовності, перший член якої дорівнює 360, а кожний наступний на 4 менший від попереднього.
5. Сума всіх двоцифрових чисел, кратних 10.
7. Четвертий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 125$, $q = 4$.

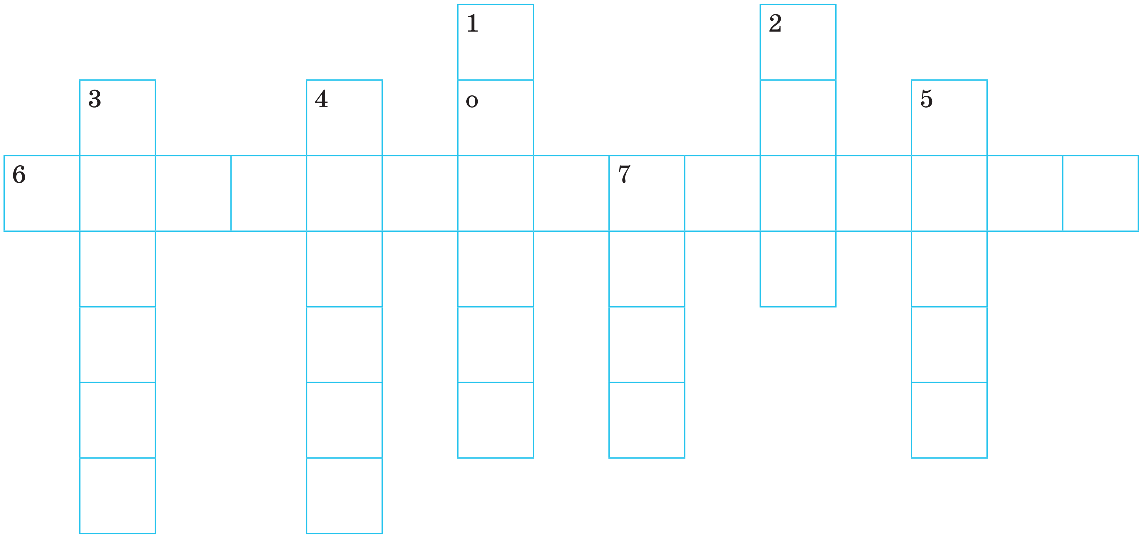
СТАТИСТИКА І ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ



1. Наука про отримання, оброблення й аналіз кількісних даних.
2. Спосіб подання даних.
3. Значення вибірки, що зустрічається найчастіше.
4. Число, що стоїть посередині впорядкованої сукупності даних.
5. Подія, що за певних умов обов'язково відбудеться.
6. Подія, що за певних умов не може відбутися в жодному випадку.
7. Сукупність об'єктів, на основі яких проводять дослідження.
8. Учений, який заклав основи теорії ймовірностей.
9. Випадкові події, що є наслідками випробувань, жодні з яких не мають переваг.

МАТЕМАТИЧНЕ ДОЗВІЛЛЯ

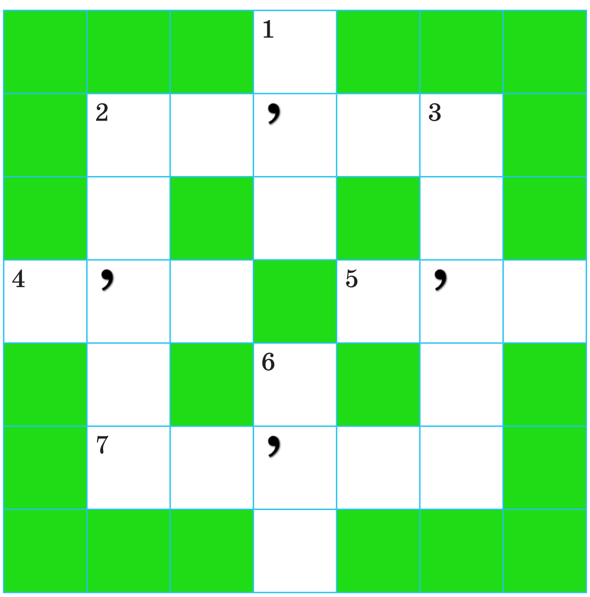
КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ



1. Абсолютна величина вектора.
2. Абсциса будь-якої точки, що лежить на осі ординат.
3. Учений, чиїм ім'ям названо прямокутну систему координат.
4. Напрямлений відрізок.
5. Геометрична фігура, задана рівнянням $ax+by+c=0$.
6. Вектори, скалярний добуток яких дорівнює нулю.
7. Геометрична фігура, рівняння якої має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

Увага! Числа, що є відповідями на запитання кросворду, потрібно записувати цифрами. Вважайте $\pi\approx3{,}14$, $\sqrt{2}\approx1{,}41$, $\sqrt{3}\approx1{,}73$.



По вертикалі

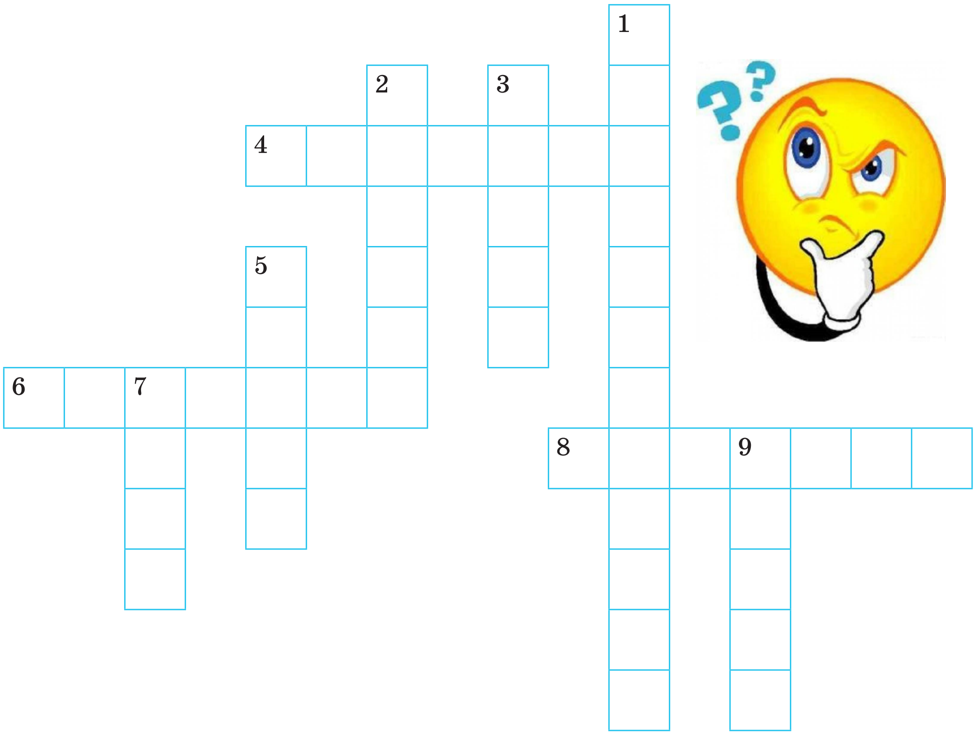
1. Радіус кола, вписаного в квадрат зі стороною 9.
2. Сторона квадрата, вписаного в коло радіусом 21.
3. Сторона правильного трикутника, описаного навколо кола радіусом 4.
6. Сторона правильного шестикутника, вписаного в коло радіусом 1,8.

По горизонталі

2. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло радіусом 17.
4. Радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника зі стороною 2,7.
5. Сторона квадрата, описаного навколо кола радіусом 3,6.
7. Довжина кола радіусом 3.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У кросворд потрібно вписати слова, пропущені в твердженнях.



1. Якщо площу чотирикутника можна обчислити як добуток двох сторін на синус кута між ними, то цей чотирикутник — ...
2. Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на ... описаного кола.
3. Формула для обчислення площі трикутника за трьома його сторонами названа на честь ученого за ім'ям ...
4. Відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута — це ... кола, описаного навколо трикутника.
5. У тригонометричному колі ... кута дорівнює ординаті точки.
6. Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на ... кута між ними.
7. ... квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.
8. Якщо в трикутнику зі сторонами a, b, c справджується нерівність $a^2+b^2>c^2$, то кут, протилежний стороні c, — ...
9. Якщо косинус, тангенс або котангенс кута α $(\alpha<180°)$ від'ємні, то кут α — ...

ВІДПОВІДІ

Кросворд «Нерівності»

По вертикалі. 1. Дванадцять. 2. Двадцять. 4. Сім. 5. Шість. 6. Чотири. 9. Нуль. 10. Два.

По горизонталі. 3. Вісім. 7. Десять. 8. Одинадцять.

Кросворд «Квадратична функція»

1. Квадратична. 2. Вісім. 3. Парабола. 4. Графік. 5. Три. 6. Чотири. 7. Два. 8. Мінус.

Кросворд «Прогресії»

По вертикалі. 1. 164. 2. 1064. 3. 3560. 6. 108.

По горизонталі. 2. 1963. 4. 264. 5. 450. 7. 8000.

Кросворд «Статистика і теорія ймовірностей»

1. Статистика. 2. Гістограма. 3. Мода. 4. Медіана. 5. Достовірна. 6. Неможлива. 7. Вибірка. 8. Паскаль. 9. Рівноймовірні.

Кросворд «Координати і вектори на площині»

1. Модуль. 2. Нуль. 3. Декарт. 4. Вектор. 5. Пряма. 6. Перпендикулярні. 7. Коло.

Кросворд «Правильні многокутники»

По вертикалі. 1. 4,5. 2. 29,61. 3. 13,84. 6. 1,8.
По горизонталі. 2. 29,41. 4. 2,7. 5. 7,2. 7. 18,84.

Кросворд «Розв'язування трикутників»

1. Паралелограм. 2. Радіус. 3. Герон. 4. Діаметр. 5. Синус. 6. Косинус. 7. Сума. 8. Гострий. 9. Тупий.

Оформте передплату найзручнішим для вас способом!

1. Замовте скретч-картку для передплати журналу «Математика в школах України»

Картку можна замовити: за тел. (057) 731-96-36, на сайті http://book.osnova.com.ua
Активувати картку просто — необхідно дотримувати інструкцій, зазначених на звороті.

Код картки	Вид	Період, міс.	Ціна
20ППС024	Паперова передплата	6	220,00
20ПКС008	Паперова передплата + книжковий додаток	6	270,00
20ЕПС015	Електронна передплата на сайті: http://journal.osnova.com.ua	3	94,50

2. Оформте передплату через банк

Сплатіть вартість передплати через будь-який комерційний банк на наш рахунок або оформте поштовий переказ (р/р 26009996107648, відділення №4 ПУМБ, м. Харків, МФО 334851, код ЄДРПОУ 32031438). У додатковій інформації на банківській квитанції зазначте своє прізвище, телефон та індекс передплати за каталогом Укрпошти. Надішліть до редакції (до першого числа місяця, що передує місяцю передплати) копію квитанції про сплату. E-mail для квитанцій: pochta@osnova.com.ua

3. Оформте передплату в будь-якому відділенні Укрпошти

4. Оформте передплату на сайті http://journal.osnova.com.ua

Для цього зареєструйтеся на сайті. Оберіть вид передплати, журнал та період.

Передплатний індекс Укрпошти	Кількість виходів в місяць	3 місяці	6 місяців
		поштова	поштова
01650	3	135,00	270,00
01651	3 + книжковий додаток	160,00	320,00
95932	3 (для передплатників на 6 міс.)	ПІЛЬГОВИЙ	220,00
37055	3 (для передплатників на 6 міс.+ книжковий додаток)	ПІЛЬГОВИЙ ПЛЮС	270,00
Електронна передплата на сайті: http://journal.osnova.com.ua		94,50	189,00
Електронна передплата + книжковий додаток на сайті: http://journal.osnova.com.ua		112,00	224,00

Залишайтеся зі своїм улюбленим журналом упродовж усього року!

Передплату можна оформити: за тел. (057) 731-96-35, (067) 572-30-37; на сайті http://journal.osnova.com.ua; у будь-якому відділенні Укрпошти або у регіонального представника вашого міста.

ОСНОВА ВИДАВНИЧА ГРУПА

Основа професійного зростання
Комплект журналів ВГ «Основа» (індекс — 01631)

01654	Управління школою
90811	Виховна робота в школі
08402	Вивчаємо українську мову та літературу
90814	Зарубіжна література
01656	Англійська мова та література
68764	Англійська мова. Усе для репетитора
01650	Математика в школах України
08417	Фізика в школах України
08408	Історія та правознавство
08405	Географія
90807	Економіка
01660	Біологія
01658	Хімія
08412	Початкове навчання та виховання
37064	Класному керівнику
37063	Інформатика в школі
37071	Фізичне виховання в школах України
37067	Мистецтво в школі
37068	Трудове навчання в школі
37059	Завучу. Усе для роботи
37070	Шкільному психологу. Усе для роботи
49672	Основи здоров'я
49673	Педагогічна майстерня
49677	Шкільний бібліотекар
49670	Логопед
89476	Вихователю ГПД. Усе для роботи

До складу комплекту не входить

90810	Англійська мова в початковій школі
95929	Дошкільний навчальний заклад
37061	Зростаємо разом
37069	Німецька мова в школі
86364	Дитина з особливими потребами. Інклюзивна освіта. Дефектологія. Корекційна педагогіка

«Математика в школах України. Позакласна робота»
один випуск на місяць
Засновник ТОВ «Видавнича група "Основа"»
Свідоцтво серія КВ № 16537-5009Р від 06.04.2010 р.
Головний редактор Ірина Маркова
Редакція може не поділяти точки зору автора. Автори публікацій відповідають за достовірність фактів, цитат, власних назв. Відповідальність за рекламну інформацію несе рекламодавець. Рукописи не рецензуємо і не повертаємо.
Адреса для листування: ВГ «Основа»,
вул. Плеханівська, 66, м. Харків, 61001,
Тел. факс: (057) 731-96-33
E-mail: office@osnova.com.ua
WWW.OSNOVA.COM.UA
редакція журналу «Математика в школах України. Позакласна робота». Тел. (057) 731-96-33
e-mail: math@osnova.com.ua
Якщо не отримуєте журнали,
телефонуйте: (057) 731-96-36
З питань замовлення книг:
(057) 731-96-35, pochta2@osnova.com.ua
Рекламний відділ:
(057) 731-96-34, reklama@osnova.com.ua
Адміністратор сайту:
(057) 731-96-33, site@osnova.com.ua

Підписано до друку 23.06.17. Формат 84x108/16.